Chapitre 12

Dénombrement - Espaces probabilisés finis

Table des matières

1 Dénombrement

1.1 Cardinal d'un ensemble

Définition 1. (Cardinal d'un ensemble fini (☆))

On appelle cardinal d'un ensemble fini E ....

On le note $\text{Card } E$.
Par convention, $\text{Card } \emptyset = 0$

Proposition 1. (Formule du Crible de Poincaré (☆)) (admis)
Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E. On a :

$$\text{Card } (A \cup B) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En particulier, si A et B sont disjoints : $\text{Card } (A \cup B) =$ ....

Définition 2. (Partition d'un ensemble (☆☆))
Soit E un ensemble et $(A_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de parties E.
(A_i) est une **partition de** E si et seulement si :

- $\forall i \in I, \ A_i \neq \emptyset$.
- Les A_i sont deux à deux disjointes (..).
- ....

Exercice de cours 1. (☆)

1. Donner plusieurs partitions de l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e\}$.
2. Donner plusieurs partitions de $F = [\![1, 10]\!]$
3. Donner toutes les partitions de l'ensemble $G = \{a, b, c\}$.

Proposition 2. (Cardinal d'un produit cartésien (☆☆)) (admis)

- Soient E et F deux ensembles finis : ....
- Soient $E_1, \ E_2, \ldots, E_n$ n ensembles finis : ....

Exemple 1. Vérifions le premier point ci-dessus en donnant tous les éléments de $[\![2, 4]\!] \times [\![1, 2]\!]$.

1.2 Dénombrement

1.2.1 p-listes

1.2.1.1 Définition

Définition 3. (p-listes ou p-uplets (☆))
On appelle p-liste, ou p-uplet, d'éléments d'un ensemble E toute liste ordonnée de p éléments de E.
- Une 2-liste de E est donc un couple de E (ou encore un 2-uplet).
- Une 3-liste de E est un triplet de E (ou encore un 3-uplet).
- Une 4-liste de E est un quadruplet de E (ou encore un 4-uplet). - etc.

Exercice de cours 2. (☆)

1. Donner cinq 3-liste de $\mathbb{N}$.
2. Donner cinq 3-liste de $\{M, A, T, H, S\}$
3. Donner quelques 5-liste de $\{P, A, I, R\}$

Attention ! (☆) Dans une p-liste, l'ordre des éléments compte : $(1, 8, 5)$ et $(8, 1, 5)$ sont deux 3-liste différentes !

Attention ! (☆) Dans une p-liste, on peut répéter plusieurs fois le même élément.

1.2.1.2 Nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments

Proposition 3. (Nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments (☆)) (admis)

Si E est un ensemble à n éléments, il y a .... p-listes de E.

Remarque. (☆) On pourra aussi retenir ce résultat sous la forme suivante :

Il y a n^p listes avec répétitions de p éléments pris parmi n.

Exercice de cours 3.

1. (☆) Combien y a-t-il de codes possibles pour un cadenas à 4 chiffres ?
2. (☆) Combien y a-t-il de numéros de téléphone commençant par 06 ?
3. (☆) Combien pouvons nous former de mots (ayant un sens ou non) avec 5 lettres de l'alphabet ?
4. (☆) On lance deux fois de suite un dé à 6 faces, combien y a-t-il de résultats possibles ?
5. (☆) On effectue p tirages successifs **avec** remise dans une urne contenant n boules distinctes. Combien y a-t-il de tirages différents possibles ?
6. (☆☆☆) Combien y a-t-il d'applications de $I = \{1, 2, 3\}$ dans $J = \{1, 2, 3, 4\}$?

1.2.2 p-listes sans répétition

1.2.2.1 Définition

Définition 4. (Arrangements (☆))
On appelle **arrangement** ou **p-liste sans répétition** toute p-liste constituée d'éléments 2 à 2 distincts.

Exemple 2. (☆)

- $(4, 5, 1, 3)$ est un arrangement de 4 éléments de $[\![1, 6]\!]$.
- $(4, 5, 1, 5)$ n'est pas un arrangement d'éléments de $[\![1, 6]\!]$.

1.2.2.2 Nombre de d'arrangements de p éléments pris parmi n

Proposition 4. (Nombre de d'arrangements de p éléments pris parmi n (☆)) (admis)
On note A_n^p le nombre de d'arrangements de p éléments pris parmi n. On a alors :

$A_n^p =$ ....

Exercice de cours 4.

1. (☆) Combien y a-t-il de codes qui ne contiennent pas deux fois le même chiffre pour un cadenas à 4 chiffres ?
2. (☆) Combien y a-t-il de numéros de téléphone commençant par 06 et qui ne contiennent pas deux fois le même chiffre ?
3. (☆) Combien pouvons nous former de mots de 5 lettres (ayant un sens ou non) ne contenant pas deux fois la même lettre ?
4. (☆) On lance deux fois de suite un dé à 6 faces, combien y a-t-il de résultats possibles qui ne sont pas des "double" ?
5. (☆) On effectue p tirages successifs **sans** remise dans une urne contenant n boules distinctes. Combien y a-t-il de tirages différents possibles ?
6. (☆☆☆) Combien y a-t-il d'applications injectives de $I = \{1, 2, 3\}$ dans $J = \{1, 2, 3, 4\}$?

Définition 5. (Permutations (☆))
On appelle permutation d'un ensemble à n élément toute n-liste de E.

Remarque. Une permutation de n élément est donc une liste de ces n éléments.

Exemple 3. $(1,2,3,4)$, $(2,1,3,4)$, $(3,1,2,4)$, $(4,3,2,1)$ sont des permutations de $\{1,2,3,4\}$.

Exercice de cours 5. (☆) Donner toutes les permutations de $E = \{a, b, c\}$.

Proposition 5. (Nombre de permutations. (☆)) (admis)
Soit E un ensemble à n éléments. Il y a .... permutations de E.

Exercice de cours 6.

1. (☆) Il y a 8 livres, tous distincts, sur une étagère. De combien de façon peut-on les ranger ?
2. (☆) Combien y a-t-il d'anagrammes (ayant un sens ou non) du mots MATHS ?
3. (☆) Combien de classement possibles de 35 élèves y a-t-il ?
4. (☆) J'ai perdu le code de mon cadenas à 4 chiffres. Je me rappelle juste qu'il était formé des chiffres 4, 7, 8 et 0. Combien de code devrais-je essayer au pire ?
5. (☆☆☆) Combien y a-t-il de bijections de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même ?
6. (☆☆☆) Combien y a-t-il de bijections de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même laissant 1 invariant ?

1.2.3 Combinaisons et nombres de parties d'un ensemble fini

1.2.3.1 Combinaisons

Définition 6. (Combinaison de p éléments d'un ensemble (☆))
On appelle **combinaison** de p éléments pris parmi E toute partie à p éléments de E.

Remarque. "Combinaison" est donc synonyme de "partie", ou de "sous-ensemble".

Remarque. (☆)
Dans une combinaison, on ne répète donc jamais deux fois le même élément. On peut donc retenir que :

- Une p-liste est "avec ordre et avec répétition".
- Un arrangement est "avec ordre et sans répétition".
- Une combinaison est "sans ordre et sans répétition".

Il existe aussi la notion de "combinaisons avec répétition" qui est hors-programme.

Proposition 6. (Nombre de combinaisons à p éléments pris parmi n. (☆)) (admis)
Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de combinaisons à p éléments de E est :

Exercice de cours 7. Déterminer dans chaque cas si on a affaire à des combinaisons, des p-listes ou des arrangements, puis déterminer le nombre de possibilités :

1. On choisit 3 élèves parmi 35.
2. On choisit 3 élèves parmi 35 puis on nomme, parmi ces 3 élèves un président, un secrétaire, un trésorier.
3. On choisit établit la liste des anniversaires de 35 élèves, en écrivant la date d'anniversaire du 1er élève, puis celle du deuxième élève, etc..
4. On tire simultanément 3 boules parmi 10.
5. On tire successivement et avec remise 3 boules parmi 10.
6. On tire successivement et sans remise 3 boule parmi 10.
7. On range 5 objets distincts dans 10 boites distinctes.
8. On range 5 objets distincts dans 10 boites distinctes, sans mettre deux objets dans la même boite.
9. On range 5 objets identiques dans 10 boites distinctes, sans mettre deux objets dans la même boite.
10. On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

1.2.3.2 Rappel : Nombre de parties d'un ensemble fini

Proposition 7. (Nombre de parties d'un ensemble fini (☆)) (admis)
Un ensemble fini E à n élément possède .... parties. Autrement dit :

2 Espaces probabilisés finis

2.1 Espace probabilisable fini

2.1.1 Définitions

Définition 7. (Expérience aléatoire (☆))
On appelle expérience aléatoire une expérience dont le résultat n'est pas connu a priori, c'est-à-dire qu'il ne dépend que du hasard. L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé **univers**. On le note usuellement Ω et ses éléments, appelées **issues**, sont notés ω. Lors de chaque expérience, une seule issue ω de Ω est réalisée.
Dans ce chapitre, on ne traitera que le cas où Ω est un ensemble fini.

Exemple 4. (☆)

1. On lance un dé à six faces numérotées de 1 à 6, on a $\Omega =$ ....
2. On lance une pièce, on a $\Omega =$ ....
3. On lance 3 fois une pièce, on a $\Omega =$ ....

Définition 8. (Évènement (☆))
Dans le cas où l'univers d'une expérience est fini, on appelle évènement toute partie de Ω.
Le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ et alors appelé **espace probabilisable**.

Exemple 5. (☆)
Pour le lancer d'un dé à 6 faces, l'événement "le nombre obtenu est pair" est ....

Définition 9. (Évènement impossible, certain, élémentaire)

- (☆) $\emptyset$ est appelé **l'événement impossible**.
- (☆) Ω est appelé **l'événement certain**.
- (☆☆) Les événements $\{w\}$ (les singletons) sont appelés **événements élémentaires**.

2.1.2 Opérations sur les évènements

Dans le cadre des probabilités on a l'interprétation suivante des opérations sur les parties :

Définition 10. (Opérations sur les évènements)
Soit A et B deux événements.

1. (☆) $\overline{A}$ (le complémentaire de A dans Ω) est appelé **événement contraire de** A.
2. (☆) l'événement $A \cap B$ est réalisé si les événements A et B sont réalisés.
3. (☆) l'événement $A \cup B$ est réalisé si au moins un des deux événements A ou B est réalisé.
4. (☆☆) $A \subset B$ signifie que l'événement A implique l'événement B.
5. (☆) Si $A \cap B = \emptyset$, alors on dit que A et B sont **incompatibles**.

Définition 11. (Système complet d'évènements (☆))
Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements (où I est un ensemble fini de $\mathbb{N}$). On dit que cette famille forme un système complet d'événements de Ω si

1. ....
2. ....

Exemple 6. (☆)

1. pour tout événement A, $\{A, \overline{A}\}$ est un système complet d'événements.
2. Dans le cas d'un lancé de dé, si on note :
   - A : "le résultat est pair"
   - B : " le résultat est égal à 3 ou 5
   - C : "le résultat est égal à 1.

   Alors (A, B, C) est un s.c.e.
3. On tire 3 fois et avec remise une boule dans une urne contenant des boules noires et blanches. On note X le rang de la première boule blanche tirée en convenant que si on ne tire finalement pas de boule blanche alors X vaut 0. Alors $\Big((X=0), (X=1), (X=2), (X=3)\Big)$ est un s.c.e.

2.2 Espace probabilisé fini

2.2.1 Définition et premières propriétés

Définition 12. (Probabilité - Espace probabilisé fini (☆☆))
Soit Ω un ensemble fini.
On appelle probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant :

1. ....
2. ....

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est alors appelé **espace probabilisé fini**.

Remarque. (☆)
On retiendra surtout de cette définition que si A et B sont incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Proposition 8. (Propriété de base d'une probabilité) (admis)
Soit P une probabilité sur Ω et A et B deux événements de Ω.

1. (☆) $P(\overline{A}) =$ ....
2. (☆☆) Si $A \subset B$ alors ....
3. (☆) Pour toute famille $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'événements **deux à deux incompatibles**, on a

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Attention ! (☆) On écrira donc $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$ que si on sait que A_1, A_2,...,A_n sont deux à deux incompatibles.

2.2.2 Probabilité et évènements élémentaires

Proposition 9. (Définition d'une probabilité par les évènements élémentaires (☆☆)) (admis)
Une probabilité est entièrement déterminée par la connaissance des probabilités des évènements élémentaires. On peut donc définir une probabilité en attribuant à chaque évènement élémentaire une probabilité de telle sorte que la somme des probabilités des évènements élémentaires soit égale à 1.

On a en particulier le résultat suivant :

Proposition 10. (Probabilité d'un évènement et évènements élémentaires (☆☆)) (admis)
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.
La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilité de ses évènements élémentaires.
Autrement dit :

.

Remarque. (☆) On pourra se contenter de retenir la phrase suivante, moins rigoureuse :

la probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités de ses issues.

Exercice de cours 8. (☆☆)
On lance un dé à 6 faces. On note, pour tout $i \in [\![1 ; 6]\!]$, $p_i = P\Big(\{i\}\Big)$.
Ce dé est pipé de telle façon que : $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{12}$, $p_4 = \frac{1}{2}$ et $p_5 = p_6$.
Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre pair avec ce dé.

Définition 13. (Equiprobabilité (☆))
On dit que l'on est en situation d'équiprobabilité si les issues ont toutes la même probabilité.

Proposition 11. (probabilité d'un évènement en situation d'équiprobabilité (☆)) (admis)
En situation d'équiprobabilité, on a :
$$P(A) = \frac{\text{card}\, A}{\text{card}\, \Omega}$$
.

2.2.3 Formule du crible de Poincaré

Proposition 12. (Formule du crible de Poincaré (☆)) (admis)
Soit A, B et C trois événements.
$$P(A \cup B) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
et
$$P(A \cup B \cup C) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Exercice de cours 9. Une urne contient trois boules (une rouge, une verte et un jaune) indiscernables au toucher. On fait r tirages avec remise, ($r \geq 3$). Déterminer la probabilité que chacune des boules ai été tirée au moins une fois. Vérifier ensuite que cette probabilité tend vers 1 lorsque r tend vers $+\infty$.

3 Probabilités conditionnelles

3.1 Définition et propriétés de base

Définition 14. (Probabilité sachant A (☆☆))
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et A un événement de probabilité non nulle. Alors l'application P_A définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par

$$P_A(B) =$$

est une probabilité appelée probabilité conditionnelle relative à A ou probabilité sachant A.

Remarque. (☆) Le minimum vital consistera ici à retenir que $P_A(B) =$.

P_A étant une probabilité, on retrouve les formules valable pour toute probabilité, appliquées à P_A :

Proposition 13. (Propriétés de P_A (☆☆)) (admis)

1. $P_A(\overline{B}) =$ ....
2. Si $B \subset C$ alors ....
3. **Formule du crible (appliquée à P_A)** : ....

Remarque. (☆)Il faut connaître le sens des probabilités que l'on rencontre sur les branches d'un arbre de probabilité (voir schéma donné en cours).

Exercice de cours 10. (☆)
Une urne contient 3 boules blanches, 2 boules rouges et 5 boules noires. On effectue **deux tirages** sans remise et on note B_i (resp. R_i, N_i) l'évènement "la i-ième boule tirée est blanche (resp. rouges, noire)". Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules blanches.

3.2 Formule des probabilités composées

Proposition 14. (Formule des probabilités composées (☆)) (admis)

- Si $P(A) \neq 0$, alors $P(A \cap B) =$ ....
- Si $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exercice de cours 11. (☆)
On reprend l'urne de l'exemple précédent. On effectue maintenant **trois tirages** sans remise. Déterminer la probabilité d'obtenir trois boules blanches.

3.3 Formule des probabilités totales

Proposition 15. (Formule des probabilités totales (☆)) (admis)
Soit $(A_1, A_2, \dots A_n)$ un système complet d'événements tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(A_i) \neq 0$.
Alors pour tout événement B, on a :

$$P(B) = \dots\dots$$

Remarque. On utilise ce théorème quand on manque d'information, selon l'information manquante, on sait quel système complet choisir.

3.4 Formule de Bayes

Proposition 16. (Formule de Bayes (☆☆☆)) (admis)

1. Soit A et B deux évènements de probabilité non nulle, alors :

$$P_B(A) =$$

2. Soit $A_1, \dots, A_n$ un système complet d'événements et B un événement, alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$:

$$P_B(A_i) =$$

Remarque. On utilise ce théorème pour échanger le conditionnement, mais on peut s'en passer en utilisant systématiquement la formule des probabilités totales

Exercice de cours 12. On reprend l'exemple précédent. Sachant que la deuxième boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que la première soit blanche ?

4 Indépendance d'évènements

4.1 Indépendance de deux évènements (☆)

Définition 15. (Indépendance de deux évènements)
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.
On dit que deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité P si

....

Si $P(A) \neq 0$, cela revient à dire que $P_A(B) = P(B)$.

Attention ! L'indépendance dépend de la probabilité !

Exemple 7. On dispose d'un dé équilibré, d'une pièce équilibrée et d'une pièce truquée (2 piles). On lance le dé : si on obtient 1, on lance deux fois la pièce équilibrée, sinon on lance deux fois la pièce truquée.
On note A_i "obtenir pile au i-ième lancer" et C "le lancer du dé donne 1".
Montrons que A_1 et A_2 sont indépendants pour P_C mais pas pour P.

4.2 Indépendance mutuelle d'un ensemble d'évènements

Définition 16. (Indépendance mutuelle d'un ensemble d'évènements (☆☆))
On dit que $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants pour la probabilité P si pour tout ensemble d'indice $I \subset [\![1, n]\!]$,

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Exemple 8. (☆☆) Trois évènements $A_1,\ A_2,\ A_3$ sont mutuellement indépendants si et seulement si :

Exemple 9. (☆☆) On lance deux fois un dé équilibré. Soit les événements : A_1 :"le premier nombre obtenu est pair" et A_2 : "le deuxième nombre obtenu est pair" et A_3 : "la somme des deux nombres obtenus est paire". Vérifier que les A_i sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement indépendants.