Feuille d'exercices n° 12 - Dénombrement et probabilités finies

Exercice 1. (★)

1. Combien existe-t-il de nombres à 6 chiffres ne contenant pas le chiffre 0 ?
2. Combien existe-t-il de nombres à 6 chiffres dont les chiffres sont non nuls et deux à deux distincts ?
3. Combien existe-t-il de nombres à 6 chiffres ?

Exercice 2. (★)
On dispose d'un jeu de 32 cartes et on appelle une "main" tout ensemble de 5 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. Combien y a-t-il de mains contenant exactement 3 rois ?
3. Combien y a-t-il de mains où toutes les cartes sont des cœurs ?

Exercice 3. (★)
Un enfant veut dessiner un arc-en-ciel. Il n'utilise pas deux fois la même couleur et il a dans sa trousse 15 couleurs différentes. Combien d'arc-en-ciels différents peut-il dessiner s'il dessine un arc-en-ciel à :

1. 5 couleurs ?
2. 10 couleurs ?
3. 15 couleurs ?

Exercice 4. Anagrammes

1. (☆) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot SORTIE ?
2. (★) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot BABAB ?
3. (★★) Si je tire au hasard les lettres du mot PARISIEN, quelle probabilité ai-je de tomber sur ASPIRINE ?
4. (★★) Paul Valéry a écrit les "lettres à Néère", Néère étant l'anagramme du prénom "Renée" (sans tenir compte des accents). Combien y a-t-il d'anagramme de "Renée" ;
   (a) en tenant compte des accents ?
   (b) sans tenir compte des accents ?
5. (★★★) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot ANAGRAMMES ?
6. (★★★) Si je tire au hasard les lettres des mots CHAUVE SOURIS, et que je n'écrit pas les accents, quelle probabilité ai-je de tomber sur SOUCHE A VIRUS ?"
7. (★★★) Si je tire au hasard les lettres des mots ALBERT EINSTEIN, quelle probabilité ai-je de tomber sur RIEN N EST ETABLI ?"
8. (★) On tire n boules, successivement et avec remise, dans une urne contenant des boules rouges et des boules noires. On note par exemple RNNRR le résultat d'un tel tirage de 5 boules. On obtient ainsi un "mot" à 5 lettres. Combien de mots à 10 lettres contenant exactement trois fois R peut-on ainsi tirer ?
9. (☆) à (★★★) Calculer le nombre d'anagrammes de votre prénom, sans tenir compte des accents.
10. (☆) à (★★★) Recommencer en prenant maintenant votre nom et prénom ensembles.

Exercice 5. (★)
Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules. Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules portant des numéros de même parité dans les cas suivants :

1. On tire les deux boules simultanément
2. On tire une boule, on la remet dans l'urne et on tire une seconde boule.

Exercice 6. (★)
Une urne contient n boules blanches et autant de boules noires (où $n \in \mathbb{N}^*$). On effectue n tirages successifs et sans remise dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire ?

Exercice 7. (★)
On dispose de 3 urnes numérotées de 1 à 3. Pour tout $k \in [\![1, 3]\!]$, l'urne numéro k contient k boules blanches et $3 - k$ boules noires.

1. On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ?
2. On recommence la même expérience et on constate que la boule est blanche. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne 1 ?

Exercice 8. (★)
On lance deux fois un dé équilibré et on définit les évènements suivants :

- A_1 : "la somme des deux lancers vaut 6".
- A_2 : " la somme des deux lancers vaut 7".
- B : "Le premier lancer donne 4".

Les évènements A_1 et B sont-ils indépendants ? Et les évènements A_2 et B ?

Exercice 9. (★★★)

1. A quelle condition deux évènements incompatibles A et B sont-ils indépendants ?
2. Un évènement A peut-il être indépendant de lui-même ?

Exercice 10. (★★)
A l'entrée d'un immeuble, on a un clavier de 12 touches : trois lettres A, B et C et les 9 chiffres autres que 0.
Le code d'ouverture de la porte est composé d'une lettre suivie de quatre chiffres.

1. Combien y a-t-il de codes différents ?
2. Combien y a-t-il de codes :
   (a) comportant au moins une fois le chiffre 7 ?
   (b) pour lesquels tous les chiffres sont pairs ?
   (c) pour lesquels les quatre chiffres sont différents ?
3. Combien y a-t-il de codes pour lesquels les quatre chiffres sont dans l'ordre strictement croissant ?

Exercice 11. (☆)

On joue à pile ou face quatre fois de suite.

- On note A l'événement : « on obtient deux fois pile et deux fois face »
- On note B l'événement : « les deux premiers lancers ont donné des résultats différents ».

a. Décrire l'univers Ω et l'ensemble des événements $\mathcal{P}(\Omega)$.
On calculera notamment le cardinal de $\mathcal{P}(\Omega)$.

b. Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cup B)$.

Exercice 12. (★★)

Un tiroir contient 10 paires de chaussettes toutes différentes.
On pioche au hasard 4 chaussettes.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une paire complète ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir deux paires ?

Exercice 13. (☆)

On lance 7 fois de suite un même dé à 20 faces.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros distincts à chaque lancer ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir toujours le même numéro ?

Exercice 14. (★)

Un tiroir contient 12 paires de chaussettes et 2 paires de gants. Les doigts engourdis par le froid et la vision obscurcie par le sommeil, on pioche n objets dans le tiroir.

a. Que doit valoir n au minimum pour avoir une probabilité non nulle d'obtenir une paire de chaussettes complète et une paire de gants complète ?

b. Même question pour une probabilité égale à 1.

c. Et que doit valoir n au minimum pour que cette probabilité soit supérieure ou égale à $1/2$?

Exercice 15. (★★★)

On place au hasard cinq boules distinguables dans quatre boîtes également distinguables.

a. Combien y a-t-il de rangements possibles ?

b. Quelle est la probabilité que toutes les boules soient dans la même boîte ?

c. Quelle est la probabilité que deux boîtes exactement soient vides ?

d. Quelle est la probabilité qu'une boîte exactement soit vide ?

e. En déduire la probabilité qu'aucune boîte ne soit vide.

f. Retrouver ce résultat avec la formule du crible.

Exercice 16. (★★★)

Une urne contient 8 boules numérotées de 1 à 8.
On tire trois fois de suite une boule avec remise.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres dans un ordre strictement croissant ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres dans un ordre croissant ?

Exercice 17. (☆)

On considère un jeu de fléchettes sur une cible comportant 3 zones : Z_1, Z_2 et Z_3. On lance une fléchette sur la cible. Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, on considère les événements A_k = « la fléchette atteint la zone Z_k ».
Soit $\mathbb{P}$ une probabilité définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle qu'il existe un réel c vérifiant, pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, $\mathbb{P}(A_k) = c\,k$.

Déterminer l'unique valeur possible pour c.

Exercice 18. (★★)

Une expérience est conduite pour étudier la mémoire des rats. Un rat est mis devant trois couloirs. Au bout de l'un d'eux se trouve la nourriture qu'il aime, au bout des deux autres, il reçoit une décharge électrique. Cette expérience est répétée jusqu'à ce que le rat trouve le bon couloir.

Quelle est la probabilité que la première tentative réussie soit la $k^{\text{ème}}$?
On répondra à cette question sous chacune des trois hypothèses suivantes.

- (H_1) le rat n'a aucun souvenir des expériences antérieures,
- (H_2) le rat se souvient de l'expérience immédiatement précédente,
- (H_3) le rat se souvient des deux expériences précédentes.

Exercice 19. (★)

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R_1, R_2 et R_3 : les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe R_1, 50% pour la classe R_2, et 30% pour la classe R_3. Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

a. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?

b. Si M. Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

Exercice 20. (★)

En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), deux sur cinq prennent un médicament M présentant des effets secondaires : avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés. Avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

a. Quel est le taux global de personnes soulagées ?

b. Quel est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

Exercice 21. (★)

Une usine fabrique 3% de pièces défectueuses. Toutes les pièces fabriquées sont contrôlées. 99% des pièces correctes sont acceptées et 98% des pièces défectueuses sont refusées. Calculer la probabilité pour que :

a. La pièce testée soit refusée à tort.

b. La pièce testée soit acceptée.

c. Le contrôle commette une erreur.

d. Une pièce qui a été acceptée soit en fait défectueuse.

Exercice 22. (★)
Les ampoules de la marque X sont fabriquées dans deux usines, A et B. 20% des ampoules de l'usine A et 5% de l'usine B sont défectueuses. Chaque semaine l'usine A produit $2n$ ampoules et l'usine B produit n ampoules (où n est un entier). On tire une une ampoule au hasard dans la production d'une semaine.

a. Quelle est la probabilité que l'ampoule tirée ne soit pas défectueuse ?

b. Si l'ampoule tirée est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'usine A ?

Exercice 23. (★)
Une compagnie aérienne étudie l'évolution des réservations sur l'un de ses vols. Elle constate que l'état d'une place donnée évolue ainsi : elle est libre au jour 0 (jour d'ouverture des réservations), puis, si elle est libre au jour n, il y a une probabilité $\frac{4}{10}$ que quelqu'un la réserve au jour $n+1$. Par contre, si elle est réservée au jour n, elle reste réservée au jour $n+1$ avec probabilité $\frac{9}{10}$. On note p_n la probabilité que la place soit réservée au jour n. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et en déduire p_n, puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 24. (★★)
Une guêpe entre par inadvertance dans un appartement composé de deux pièces A et B. Elle est dans la pièce A à $t=0$, et évolue ainsi : si elle est en A à l'instant n, elle reste en A avec probabilité $\frac{1}{3}$ ou passe en B avec probabilité $\frac{2}{3}$ à l'instant $n+1$; si elle est en B, elle retourne en A avec probabilité $\frac{1}{4}$, reste en B avec probabilité $\frac{1}{2}$ et sort de l'appartement avec probabilité $\frac{1}{4}$. Si elle est dehors, elle y reste. On note A_n : « La guêpe est en A à l'instant n ». Je vous laisse deviner ce que représentent B_n et C_n. Les probabilités respectives de ces événements sont notées a_n, b_n et c_n.

1. Calculer a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2.
2. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.
3. Montrer que $u_n = \frac{6}{10}a_n - \frac{3}{10}b_n$ est une suite constante.
4. Montrer que $u_n = \frac{4}{10}a_n + \frac{3}{10}b_n$ est une suite géométrique.
5. En déduire les valeurs de a_n et de b_n.
6. Que vaut c_n ?

Exercice 25. (★★)
Dans un square, un enfant cherche à monter au sommet d'une « cage à écureuil ». Il s'agit d'une structure métallique que l'enfant doit escalader jusqu'à son sommet.
La cage est constituée de trois niveaux. L'enfant part du premier niveau A. Il cherche ensuite à atteindre le deuxième niveau B et enfin le troisième niveau qui est le sommet C.
On décompose l'ascension de l'enfant en une succession d'instants. On suppose qu'à l'instant 0, l'enfant se trouve sur le niveau A puis que la montée se fait selon le protocole suivant :

- si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau A, alors à l'instant suivant $n+1$ il y reste avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et passe au B avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau B, alors à l'instant suivant $n+1$ il y reste avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et passe au B avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- si à un instant n donné l'enfant et sur le niveau C, alors il y reste définitivement.

On note, pour tout entier naturel n :

- A_n l'évènement : « l'enfant se trouve sur le niveau A à l'instant n »
- B_n l'évènement : « l'enfant se trouve sur le niveau B à l'instant n »
- C_n l'évènement : « l'enfant se trouve sur le niveau C à l'instant n »

et on note $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Calculer a_1, b_1, c_1.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n \\ b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \\ c_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + c_n \end{cases}$$

3. Exprimer a_n en fonction de n.
4. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = 3^n b_n$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 2.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de v_n, puis de b_n en fonction de n.
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}$, quelle est la valeur de $a_n + b_n + c_n$? En déduire une expression de c_n en fonction de n.
   (d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$ et interpréter le résultat.
   (e) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note S_n l'évènement « l'enfant atteint le sommet à l'instant n ».
      - Expliquer la différence entre S_n et C_n.
      - Exprimer S_n à l'aide des évènements précédemment définis.
      - En déduire, pour $n \geq 2$ la valeur de $P(S_n)$.