DM n° 6 - Étude d'une fonction et d'une suite

Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x} \text{ si } x>0\\ 1 \text{ si } x=0\end{cases}$.

1. Démontrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.
2. Le but de cette question est de démontrer que f est dérivable en 0.
   (a) Montrer que cela revient à démontrer que le quotient $\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ a une limite finie quand $x\to 0$.
   (b) Démontrer que pour tout $x>0$,
   $$-\frac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)-x\leq -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}.$$
   On pourra, pour cela, étudier les variations sur $]0,+\infty[$ des fonctions g et h définies par :
   $$g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2} \text{ et } h(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}.$$
   Et déduire de ces tableaux de variations le signe de g et de h sur $]0,+\infty[$, puis conclure.
   (c) En déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.
3. Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$.
   Donner l'expression de $f'(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$.
4. Le but de cette question est de prouver que pour tout $x\geq 0$, $|f'(x)|\leq \dfrac{1}{2}$.
   (a) On admet que f' est dérivable sur $]0,+\infty[$.
   Vérifier que pour tout $x>0$, $f''(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x^3(x+1)^2}$ avec $\varphi(x)=2(x+1)^2\ln(x+1)-3x^2-2x$.
   (b) Vérifier que pour tout $x>0$, $\varphi''(x)=4\ln(x+1)$ (Attention : il s'agit bien de la dérivée seconde !)
   (c) En déduire le tableau de variations de φ' sur $]0,+\infty[$ puis le signe de φ' sur $]0,+\infty[$ puis le tableau de variations de φ sur $]0,+\infty[$ puis le signe de φ sur $]0,+\infty[$ et déduire de cela que f' est croissante sur $]0,+\infty[$.
   (d) On rappelle qu'on a prouvé à la question 2.c que $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$. On admet que f' est continue en 0.
   Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$ puis donner le tableau de variations complet de f'.
   (e) Déduire enfin de ce tableau que, pour tout $x\geq 0$, $|f'(x)|\leq\dfrac{1}{2}$.
5. Justifier que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_+^*$. Puis vérifier que $\alpha\in]0,1[$.

Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0>0$ et :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\frac{\ln(1+u_n)}{u_n}.$$

6. Démontrer (par récurrence) que pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et $u_n>0$.
7. Démontrer (par récurrence) que pour tout entier naturel n, $|u_n-\alpha|\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|u_0-\alpha|$.
8. En déduire la limite de (u_n).