DM05 - Correction

Lien vers la correction en vidéo

1. a) On a $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

Or $\lim_{x \to 0} f_0(x) = \ell$

Donc $\lim_{n \to +\infty} f_0(u_n) = \ell$ (par composition des limites)

De même $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} f_0(v_n) = \ell$

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_0(u_n) = \sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = \sin(2n\pi) = 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_0(u_n) = 0$

La suite $(f_0(u_n))$ est constante égale à 0.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_0(v_n) = \sin\left(\frac{1}{v_n}\right) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$

Donc la suite $(f_0(v_n))$ est constante égale à 1.

c) On a, d'après la question b :

$\lim_{n \to +\infty} f_0(u_n) = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} f_0(v_n) = 1.$

Donc $(f_0(u_n))$ et $(f_0(v_n))$ n'ont pas la même limite

Ce qui est en contradiction avec la question a.

Donc $f_0 : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

2) Supposons que $\lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

On a $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{u_n}\right) = \ell$

et $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{v_n}\right) = \ell$

Or :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\cos\left(\frac{1}{u_n}\right) = \cos(2n\pi) = 1$

Donc $\lim_{n \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{u_n}\right) = 1$

Donc $\ell = 1$.

D'autre part :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\cos\left(\frac{1}{v_n}\right) = \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Donc $\lim_{n \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{v_n}\right) = 0$

Donc $\ell = 0$

Donc $\ell = 1$ et $\ell = 0$: absurde

Donc $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

3) a) Pour tout $x \neq 0$ $f_1(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

b)

$$f_1(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Pour tout $x \neq 0$, $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1$. $\Big\} \times |x| > 0$

$\Longleftrightarrow \left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x|$

Or $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$

Donc, par le théorème d'encadrement :

$\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

On a donc $\lim\limits_{x \neq 0} f_1(x) = f_1(0)$

Donc f_1 est continue en 0

3c) Pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \frac{x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x} = \frac{\cancel{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or on a vu à la question 1 que $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$

Donc f_1 n'est pas dérivable en 0.

4 a)

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b) f_2 est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables.

Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \dfrac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x}$

$= x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Or on a vu à la question 3b que $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Donc f_2 est dérivable en 0 et $\boxed{f_2'(0) = 0}$.

c) Pour $x \neq 0$, $f_2(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$f_2'(x) = \left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = (x^2)' \times \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(\sin \underbrace{\frac{1}{x}}_{u}\right)'$

$= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{u'} \times \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\cos(u)}$

$$\boxed{f_2'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}$$

On a $\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - f_2'(x)$

Supposons que $f_2'(x)$ a une limite ℓ quand $x \to 0$

On a $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (question 3.b)

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 - \ell = \ell$

Or $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$

Donc $f_2'(x)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$.