DM n° 3 - Suite logistique

On considère un réel $\mu \in]0,4[$ et la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \,]0,1[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mu u_n(1-u_n). \end{cases}$$

Le but de ce DM est d'étudier le comportement asymptotique de la suite (u_n) selon la valeur de μ et de u_0.

On pourra aller observer le comportement de cette suite selon la valeur de u_0 et μ en cliquant sur ce lien. Nous nous contenterons d'étudier cette suite dans deux cas simples.

Étude préliminaire de la fonction de récurrence.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mu x(1-x)$.

(a) Justifier que le tableau de variation de f sur $[0,1]$ est le suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\mu}{4}$	$\searrow$	0

En développant, on obtient : $f(x) = \mu x - \mu x^2$.
Donc $f(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -\mu,\ b = \mu,\ c = 0$, donc f est un polynôme de degré 2.
Le coefficient de x^2 est négatif donc f est croissante puis décroissante et atteint son maximum en $-\frac{b}{2a} = -\frac{\mu}{-2\mu} = \frac{1}{2}$.
On a enfin $f(0) = f(1) = 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \mu \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4}$.

Autre raisonnement possible (plus court) : f est un polynôme de degré 2 dont le coefficient de x^2 est $-\mu$ donc négatif. Donc f est croissante puis décroissante.
De plus elle s'annule en 0 et en 1. Par symétrie elle atteint son maximum au centre du segment $[0,1]$, c'est-à-dire en $\frac{1}{2}$.
Enfin $f\left(\frac{1}{2}\right) = \mu \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4}$.
On pouvait aussi dériver f bien entendu.

(b) En déduire, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.
On pose $\mathscr{P}(n)$: « $0 < u_n < 1$ »
Montrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
Initialisation ($n = 0$)
On sait que $u_0 \in \,]0,1[$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons $P(n+1)$.
D'après le tableau de variations de la question 1.a, si $x \in \,]0,1[$, alors $0 < f(x) < \frac{\mu}{4}$ et donc $f(x) \in \,]0,1[$.
Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \in \,]0,1[$, donc, $f(u_n) \in \,]0,1[$.
Conclusion : par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

(c) Justifier que le tableau de signe $f(x) - x$ pour $x \in [0, 1]$ est le suivant :

Si $\mu \in]0, 1]$:

x	0		1
$f(x) - x$		$-$	

Si $\mu \in]1, 4[$:

x	0		$1 - \frac{1}{\mu}$		1
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	

$f(x) - x = -\mu x^2 + \mu x - x = -\mu x^2 + (\mu - 1)x = x(-\mu x + \mu - 1)$.
x est positif sur $[0, 1]$, donc $f(x)$ est du même signe que $-\mu x + \mu - 1$.
Or $-\mu x + \mu - 1$ est l'expression d'une fonction affine décroissante qui s'annule en $\frac{\mu - 1}{\mu} = 1 - \frac{1}{\mu}$, qui a donc ce tableau de signe sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$1 - \frac{1}{\mu}$		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	

Si $\mu \in]0, 1]$, alors $\frac{1}{\mu} > 1$ et donc $1 - \frac{1}{\mu} < 0$. Et donc $-\mu x + \mu - 1$ est négatif pour tout $x \in]0, 1[$.
Si $\mu > 1$, alors $\frac{1}{\mu} < 1$ et donc $0 < 1 - \frac{1}{\mu} < 1$ et on a donc le tableau suivant :

x	0		$1 - \frac{1}{\mu}$		1
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	

Étude du cas $\mu \in]0, 1]$

2. On suppose dans cette question que $\mu \in]0, 1]$.

(a) A l'aide de la question 1.c, démontrer que (u_n) est décroissante.
Soit $n \in \mathbb{N}$:
$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$.
Or on sait, d'après la question **1.b** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$.
Donc, d'après la question **1.c**, et parce qu'ici $\mu \in]0, 1]$, $f(u_n) - u_n < 0$.
Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n < 0 \text{ : la suite } (u_n) \text{ est bien décroissante.}}$$

(b) En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ que vous déterminerez.
La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite $\ell \geq 0$.
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mu u_n(1 - u_n)$. Or :

- $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$
- $\lim_{n \to +\infty} \mu u_n(1 - u_n) = \mu\ell(1 - \ell)$, par opérations sur les limites.

Donc, par unicité de la limite, $\ell = \mu\ell(1 - \ell)$.

On a donc :

$$\begin{aligned} & \ell = \mu\ell(1-\ell) \\ \iff & \ell = \mu\ell - \mu\ell^2 \\ \iff & \mu\ell^2 + (1-\mu)\ell = 0 \\ \iff & \ell(\mu\ell + 1 - \mu) = 0 \\ \iff & \ell = 0 \text{ ou } \mu\ell + 1 - \mu = 0 \\ \iff & \ell = 0 \text{ ou } \ell = \frac{\mu-1}{\mu} \\ \iff & \ell = 0 \text{ ou } \ell = 1 - \frac{1}{\mu} \end{aligned}$$

Or $\mu < 1$ donc $1 - \dfrac{1}{\mu} < 0$.

Mais on a vu que $\ell \geq 0$. Donc ℓ ne peut pas être égal à $1 - \dfrac{1}{\mu}$.

D'où $\ell = 0$ et donc :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } 0.}$$

Étude du cas $\mu \in]1, 2]$

2. On suppose dans cette question que $\mu \in]1, 2]$. On pose $m = 1 - \dfrac{1}{\mu}$.

   (a) Démontrer que $0 < m \leq \dfrac{1}{2}$.
   on a :

$$\begin{aligned} & 1 < \mu \leq 2 \\ \iff & 1 > \frac{1}{\mu} \geq \frac{1}{2} \\ \iff & -1 < -\frac{1}{\mu} \leq -\frac{1}{2} \\ \iff & 0 < 1 - \frac{1}{\mu} \leq \frac{1}{2} \\ \iff & 0 < m \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{0 < m \leq \frac{1}{2}}$$

(b) A l'aide de la question 1.a, démontrer que $u_1 \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$.

On a vu à la question **1.a** que si $x \in]0, 1[$, alors $f(x) \in \left]0, \frac{\mu}{4}\right]$.

Donc $u_1 = f(u_0) \in \left]0, \frac{\mu}{4}\right]$. Or $\mu \leq 2$. Donc $\frac{\mu}{4} \leq \frac{1}{2}$.

On a donc bien :

$$\boxed{u_1 \in \left]0, \frac{1}{2}\right]}$$

(c) On considère dans cette question que $0 < u_1 \leq m$.

i. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq m$.

On pose $\mathscr{P}(n)$: « $0 \leq u_n \leq m$ »

Montrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Initialisation ($n = 1$)

On a justement supposé ici que $0 < u_1 \leq m$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 1$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons $P(n+1)$.

On a vu à la question **1.a** que f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Or $m \leq \frac{1}{2}$. Et $0 \leq u_n \leq m$ par Hypothèse de récurrence.

Donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f(m)$.

Or on a justement vu à la question **1.c** que $m = 1 - \frac{1}{\mu}$ était solution de l'équation $f(x) - x = 0$.

On a donc $f(m) = m$ et par ailleurs on a déjà vu que $f(0) = 0$.

D'où : $0 \leq u_{n+1} \leq m$: $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

ii. En déduire, à l'aide de la question 1.c, que (u_n) est croissante, puis qu'elle converge vers une limite ℓ que vous préciserez.

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$.

Or on sait d'après la question **1.c**, que $f(x) - x$ est positif pour $x \in [0, m]$ (car ici $\mu \in]1, 4]$).

Et on sait que, d'après la question précédente, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0, m]$.

Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geq 0 : \text{la suite } (u_n) \text{ est bien croissante (à partir du rang 1).}}$$

De plus (u_n) est majorée à partir du rang 1 par m.

Donc elle converge vers un réel $\ell \leq m$.

Par le même raisonnement qu'à la question **2.b**, on peut dire que $\ell = 0$ ou $\ell = m$.

Mais ici, pour tout $n \geq 1$, on a $u_n \geq u_1$. Donc $\ell \geq u_1$ et $u_1 = f(u_0) > 0$. Donc $\ell \neq 0$.

D'où $\ell = m$:

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } m = 1 - \frac{1}{\mu}.}$$

(d) (Facultatif) Traiter maintenant le cas $m < u_1 \leq \frac{1}{2}$.

Si $m < u_1 \leq \frac{1}{2}$, alors, on démontre par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a $m \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.
Le raisonnement est pratiquement le même qu'à la question **3.c.i** :
On pose $\mathscr{P}(n)$: « $m \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ »
Initialisation ($n = 1$)
On a justement supposé ici que $m < u_1 \leq \frac{1}{2}$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \geq 1$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons $P(n+1)$.
f est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $0 \leq m \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.
Donc $f(m) \leq f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$.
Or $f(m) = m$ et par ailleurs on a déjà vu (à la question 2.b) que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4} \leq \frac{1}{2}$.
D'où : $m \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$: $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : par récurrence, $m \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ pour tout entier $n \geq 1$.

Or pour tout $x \in \left[m, \frac{1}{2}\right]$, $f(x) - x \leq 0$ (question 1.c en se rappelant que $m = 1 - \frac{1}{mu}$.
Donc, pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
Donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par m (à partir du rang 1) donc elle converge vers un réel $\ell \geq m$.
Et toujours par le même raisonnement que précédemment, on a $\ell = 0$ ou $\ell = m$.
On en déduit donc que $\ell = m$.
Donc dans ce cas, on peut dire que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante à partir du rang } 1 \text{ et converge vers } m.}$$