DM06 - application de l'IAF - Correction

1. Pour $x \in]0,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

Donc f est continue sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

D'autre part, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (limite du cours)

Or $f(0) = 1$.

On a $\displaystyle\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

D'où : $\boxed{f \text{ est continue sur } [0,+\infty[}$

2) a) f est dérivable en 0 si et seulement si $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ a une limite finie lorsque x tend vers 0 (avec $x>0$)

Or $\forall x>0$,
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x}$$
$$= \frac{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}{x}$$
$$= \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

Donc :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ ssi } \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \text{ a une limite finie quand } x \to 0}$$

2b) On suit les indications : on étudie les variations de g et h sur $]0,+\infty[$

g et h sont définies et dérivables sur $[0,+\infty[$

Pour tout $x \in]0,+\infty[$,
$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x$$
$$= \frac{1}{x+1} - (1-x)$$
$$= \frac{1}{x+1} - \frac{(1-x)(1+x)}{1+x}$$
$$= \frac{1-(1-x^2)}{1+x}$$
$$= \frac{x^2}{1+x} > 0 \quad (\text{car } x > 0)$$

Donc g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Or $g(0) = \ln(1+0) - 0 + 0 = 0$

x	0		$+\infty$
$g(x)$	0	$\nearrow$	

Donc $\forall x \in]0,+\infty[$, $g(x) > 0$.

D'autre part, pour tout $x \in]0,+\infty[$:
$$h'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x - x^2 = \frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2(x+1)}{x+1} = \frac{-x^3}{x+1} < 0$$

Donc h est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

Or $h(0) = 0$. On a donc le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$h(x)$	0 ↘	

Donc :

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ h(x) < 0}$$

Finalement, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

- $g(x) > 0$ c'est-à-dire $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} > 0$

  $\iff \underline{\ln(1+x) - x > -\frac{x^2}{2}}$

- $h(x) < 0$ c'est-à-dire $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} < 0$

  $\iff \underline{\ln(1+x) - x < -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}$

On a donc :

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ -\frac{x^2}{2} < \ln(1+x) - x < -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}$$

c) D'après l'inégalité ci-dessus, on a pour tout $x>0$:

$$-\frac{1}{2} < \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} < -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$$

Or $-\frac{1}{2} + \frac{x}{3} \xrightarrow[x \to 0]{} -\frac{1}{2}$

Donc, d'après le théorème d'encadrement : $\underline{\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} -\frac{1}{2}}$.

Donc :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = -\frac{1}{2}}.$$

3) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas

Pour tout $x \in]0,+\infty[$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec} \quad u(x) = \ln(1+x) \qquad u'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$v(x) = x \qquad v(x) = 1$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1} \times x - \ln(1+x) \times 1}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(1+x)}{x^2}$$

$$= \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{(x+1)\,x^2}$$

Donc.

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{(x+1)\,x^2}}$$

4) a) Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec.} \quad u(x) = x - (x+1)\ln(x+1)$$

$$u(x) = 1 - \left(1 \times \ln(x+1) , (x+1) \times \frac{1}{x+1}\right)$$

$$= 1 - \left(\ln(x+1) + 1\right)$$

$$= -\ln(x+1)$$

$$v(x) = (x+1)x^2 = x^3 + x^2$$

$$v(x) = 3x^2 + 2x = x(3x+2)$$

$$\text{Donc } f''(x) = \frac{-\ln(x+1) \times (x+1)x^2 - x(3x+2)\left(x - (x+1)\ln(x-1)\right)}{\left((x+1)x^2\right)^2}$$

$$= \frac{-x^2(x+1)\ln(x+1) - x^2(3x+2) + x(3x+2)(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)^2\,x^4}$$

$$= \frac{\cancel{x}\left((-x+3x+2)(x+1)\ln(x+1) - x(3x+2)\right)}{(x+1)^2\,x^{\cancel{4}3}}$$

$$= \frac{(2x+2)(x+1)\ln(x-1) - 3x^2 - 2x}{(x+1)^2 x^3}$$

$$= \frac{\overbrace{2(x+1)^2 \ln(x+1) - 3x^2 - 2x}^{\varphi(x)}}{(x+1)^2 x^3}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall x>0,\ f''(x) = \frac{\varphi(x)}{(x+1)^2 \times x^3}}$$

b) Pour tout $x>0$:

$$\varphi'(x) = 2\left(2(x+1)\ln(x+1) + (x+1)^2 \times \frac{1}{x+1}\right) - 6x - 2$$

$$= 4(x+1)\ln(x+1) + 2(x+1) - 6x - 2$$

$$= 4(x+1)\ln(x+1) - 4x$$

$$\varphi''(x) = 4\left(1 \times \ln(x+1) + (x+1) \times \frac{1}{x+1}\right) - 4$$

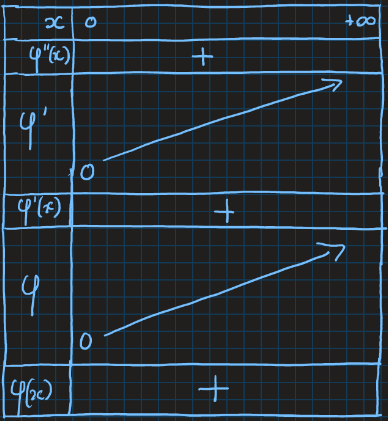
$$= 4\ln(x+1) + 4 - 4$$

On a donc .

$$\boxed{\forall x>0\ ,\ \varphi'(x) = 4\ln(x+1)}$$

c) On a pour tout $x>0$ $x+1>1$ donc $\ln(x+1)>0$

D'où, les tableaux suivants :



$\varphi(0) = 0$

$\varphi(0) = 0$

Or $\forall x > 0$, $f''(x) = \dfrac{\varphi(x)}{(x+1)^2 x^3}$

Donc $\forall x > 0$, $f''(x) > 0$

$\boxed{\text{Donc } f' \text{ est strictement croissante sur }]0, +\infty[.}$

De plus, $f'(0) = -\frac{1}{2}$ et f' est continue en 0

Et $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{(x+1)x^2} - \dfrac{(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)x^2}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x} \times \frac{1}{x}$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} \underset{X = x+1}{=} \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} = 1$

$\boxed{\text{Donc } \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0}$

Donc f' a le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
f'			0
	$-1/2$	↗	

e) D'après le tableau ci-dessus, on a :

$$\forall x > 0, \quad -\frac{1}{2} < f'(x) < 0$$

Donc : $\boxed{\forall x > 0, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2} .}$

5) On pose $\varphi(x) = f(x) - x$

$$\forall x > 0, \quad \varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0 \quad \text{car} \quad f'(x) < 0$$

D'où :

x	0		$+\infty$
	1		
φ		↘	
			$-\infty$

En effet, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} \times \frac{1+x}{x}$$

$$= 0 \quad \text{(On a déjà calculé cette limite).}$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = -\infty .$

φ est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\varphi(]0,+\infty[) =]-\infty, 1[$.

Or $0 \in]-\infty, 1[$.

Donc l'équation $\varphi(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc $\boxed{\text{l'équation } f(x)=x \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$

De plus, $\varphi(1) = f(1) - 1 = \ln 2 - \ln e < 0$

Donc $$\underbrace{\varphi(0)}_{1} > \underbrace{\varphi(\alpha)}_{0} > \underbrace{\varphi(1)}_{<0}$$

D'où, par stricte décroissance de φ :

$$\boxed{0 < \alpha < 1}$$

6. On pose $\mathcal{P}(n)$: " u_n est défini et $u_n > 0$ ".

Initialisation $(n=0)$:

u_0 est bien défini et $u_0 > 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

u_n est donc défini et $u_n > 0$

Donc $\ln(1+u_n)$ est bien défini et $\ln(1+u_n) > 0$ (car $1+u_n > 1$)

Et comme $u_n > 0$, $\dfrac{\ln(1+u_n)}{u_n}$ est défini et $\dfrac{\ln(1+u_n)}{u_n} > 0$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Donc, par récurrence :

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est défini et } u_n > 0.}$

7. On pose $\mathcal{P}(n)$: " $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$ ".

Initialisation $(n=0)$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha| \text{ donc } \mathcal{P}(0) \text{ est vraie.}$$

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

Or u_n et α sont dans $]0, +\infty[$.

Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

$$\Longleftrightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

Or $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$ par hyp. de rec.

Donc $\frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

$\Longleftrightarrow \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$

Donc $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Donc, par récurrence :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|}$$

8. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ par théorème d'encadrement.

Ce qui signifie que $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha}$.