# DM06 - application de l'IAF - Correction

1. Pour $x \in ]0, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

Donc $f$ est continue sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

D'autre part, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (limite du cours)

Or $f(0) = 1$.

On a $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = f(0)$ donc $f$ est continue en $0$.

D'où : $\boxed{f \text{ est continue sur } [0, +\infty[}$

2) a) $f$ est dérivable en $0$ si et seulement si $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ a une limite finie lorsque $x$ tend vers $0$ (avec $x > 0$)

Or $\forall x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \frac{\frac{\ln(1+x) - x}{x}}{x} = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

Donc :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ ssi } \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \text{ a une limite finie quand } x \to 0}$$

2b) On suit les indications : on étudie les variations de g et h sur $]0,+\infty[$

g et h sont définies et dérivables sur $[0,+\infty[$

Pour tout $x \in ]0,+\infty[$, $g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x$

$$= \frac{1}{x+1} - (1-x)$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{(1-x)(1+x)}{1+x}$$

$$= \frac{1-(1-x^2)}{1+x}$$

$$= \frac{x^2}{1+x} > 0 \ (\text{car } x>0)$$

**Donc g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.**

Or $g(0) = \ln(1+0) - 0 + 0 = 0$

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $0$ | ↗ | |

**Donc $\forall x \in ]0,+\infty[$, $g(x) > 0$.**

D'autre part, pour tout $x \in ]0,+\infty[$ :

$$h'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x - x^2 = \frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2(x+1)}{x+1} = \frac{-x^3}{x+1} < 0$$

**Donc h est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.**

Or $h(0) = 0$. On a donc le tableau suivant :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $h(x)$ | $0$ | $\searrow$ |

Donc :

$$\boxed{\forall x \in ]0,+\infty[,\ h(x) < 0}$$

Finalement, pour tout $x \in ]0,+\infty[$, on a :

- $g(x) > 0$ c'est-à-dire $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} > 0$

  $\iff \underline{\ln(1+x) - x > -\frac{x^2}{2}}$

- $h(x) < 0$ c'est-à-dire $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} < 0$

  $\iff \underline{\ln(1+x) - x < -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}$

On a donc :

$$\boxed{\forall x \in ]0,+\infty[,\ -\frac{x^2}{2} < \ln(1+x) - x < -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}$$

c) D'après l'inégalité ci-dessus, on a pour tout $x > 0$ :

$$-\frac{1}{2} < \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} < -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$$

Or $-\frac{1}{2} + \frac{x}{3} \xrightarrow[x \to 0]{} -\frac{1}{2}$

Donc, d'après le théorème d'encadrement : $\underline{\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} -\frac{1}{2}}$.

Donc :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = -\frac{1}{2}}.$$

3) $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas

Pour tout $x \in ]0,+\infty[$

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec} \quad u(x)=\ln(1+x) \quad u'(x)=\frac{1}{1+x}$$
$$v(x)=x \qquad v(x)=1$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x+1}\times x-\ln(1+x)\times 1}{x^2}$$
$$=\frac{\frac{x}{x+1}-\ln(1+x)}{x^2}$$
$$=\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)x^2}$$

Donc.
$$\boxed{\forall x\in ]0,+\infty[,\ f'(x)=\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)x^2}}$$

4) a) Pour tout $x>0$,

$$f'(x)=\frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec.} \quad u(x)=x-(x+1)\ln(x+1)$$
$$u(x)=1-\left(1\times\ln(x+1)+(x+1)\times\frac{1}{x+1}\right)$$
$$=1-\left(\ln(x+1)+1\right)$$
$$=-\ln(x+1)$$

$$v(x)=(x+1)x^2=x^3+x^2$$
$$v(x)=3x^2+2x=x(3x+2)$$

Donc $$f''(x)=\frac{-\ln(x+1)\times(x+1)x^2-x(3x+2)\left(x-(x+1)\ln(x-1)\right)}{\left((x+1)x^2\right)^2}$$
$$=\frac{-x^2(x+1)\ln(x+1)-x^2(3x+2)+x(3x+2)(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)^2x^4}$$
$$=\frac{\cancel{x}\left((-x+3x+2)(x+1)\ln(x+1)-x(3x+2)\right)}{(x+1)^2x^{\cancel{4}3}}$$

$$= \frac{(2x+2)(x+1)\ln(x-1) - 3x^2 - 2x}{(x+1)^2 x^3}$$

$$= \frac{\overbrace{2(x+1)^2 \ln(x+1) - 3x^2 - 2x}^{\varphi(x)}}{(x+1)^2 x^3}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall x > 0,\ f''(x) = \frac{\varphi(x)}{(x+1)^2 \times x^3}}$$

b) Pour tout $x > 0$ :

$$\varphi'(x) = 2\left(2(x+1)\ln(x+1) + (x+1)^2 \times \frac{1}{x+1}\right) - 6x - 2$$

$$= 4(x+1)\ln(x+1) + 2(x+1) - 6x - 2$$

$$= 4(x+1)\ln(x+1) - 4x$$

$$\varphi''(x) = 4\left(1 \times \ln(x+1) + (x+1) \times \frac{1}{x+1}\right) - 4$$

$$= 4\ln(x+1) + 4 - 4$$

On a donc .

$$\boxed{\forall x > 0\ ,\ \varphi'(x) = 4\ln(x+1)}$$

c) On a pour tout $x > 0$ $\quad x+1 > 1$ donc $\ln(x+1) > 0$

D'où, les tableaux suivants :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\varphi''(x)$ | | $+$ | |
| $\varphi'$ | $0$ | ↗ | |
| $\varphi'(x)$ | | $+$ | |
| $\varphi$ | $0$ | ↗ | |
| $\varphi(x)$ | | $+$ | |

$\varphi(0) = 0$

$\varphi(0) = 0$

Or $\forall x > 0,\ f''(x) = \dfrac{\varphi(x)}{(x+1)^2 x^3}$

Donc $\forall x > 0,\ f''(x) > 0$

$$\boxed{\text{Donc } f' \text{ est strictement croissante sur } ]0,+\infty[.}$$

De plus, $f'(0) = -\frac{1}{2}$ et $f'$ est continue en $0$

Et $$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(x+1)x^2} - \frac{(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)\,x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x} \times \frac{1}{x}$$

Or $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} \underset{X=x+1}{=\!=} \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$\boxed{\text{Donc } \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0}$$

Donc $f'$ a le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $-\frac{1}{2}$ | ↗ | $0$ |

e) D'après le tableau ci-dessus, on a :

$$\forall x > 0, \quad -\frac{1}{2} < f'(x) < 0$$

Donc : $\boxed{\forall x > 0, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}.}$

5) On pose $\varphi(x) = f(x) - x$

$\forall x > 0, \quad \varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0$ car $f'(x) < 0$

D'où :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\varphi$ | $1$ | ↘ | $-\infty$ |

En effet, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} \times \dfrac{1+x}{x}$

$= 0$ (On a déjà calculé cette limite).

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = -\infty$.

$\varphi$ est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\varphi(]0,+\infty[) = ]-\infty,1[$.

Or $0 \in ]-\infty, 1[$.

Donc l'équation $\varphi(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc $\boxed{\text{l'équation } f(x)=x \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$

De plus, $\varphi(1) = f(1) - 1 = \ln 2 - \ln e < 0$

Donc $$\underbrace{\varphi(0)}_{1} > \underbrace{\varphi(\alpha)}_{0} > \underbrace{\varphi(1)}_{<0}$$

D'où, par stricte décroissance de $\varphi$ :

$$\boxed{0 < \alpha < 1}$$

6. On pose $\mathcal{P}(n)$ : " $u_n$ est défini et $u_n > 0$ ".

Initialisation $(n=0)$ :

$u_0$ est bien défini et $u_0 > 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$u_n$ est donc défini et $u_n > 0$

Donc $\ln(1+u_n)$ est bien défini et $\ln(1+u_n) > 0$ (car $1+u_n > 1$)

Et comme $u_n > 0$, $\dfrac{\ln(1+u_n)}{u_n}$ est défini et $\dfrac{\ln(1+u_n)}{u_n} > 0$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Donc, par récurrence :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \ u_n \text{ est défini et } u_n > 0.}$$

7. On pose $P(n)$ : "$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$".

Initialisation $(n=0)$ :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha| = |u_0 - \alpha| \text{ donc } P(0) \text{ est vraie.}$$

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. On suppose $P(n)$ vraie. Montrons $P(n+1)$.

$f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in ]0,+\infty[$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

Or $u_n$ et $\alpha$ sont dans $]0,+\infty[$.

Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

$$\Longleftrightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

Or $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$ par hyp. de réc.

$$\text{Donc } \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

Donc $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$ : $P(n+1)$ est vraie.

Donc, par récurrence :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|}$$

8. On a $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0$

donc $\lim_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ par théorème d'encadrement.

Ce qui signifie que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha}$.