Concours Blanc n° 1 - Sujet 1

Soignez au maximum la rédaction et la présentation. ***Encadrez vos résultats***
Vous pouvez traiter les exercices dans le désordre, mais, à l'intérieur d'un exercice, vous devez traiter les questions dans l'ordre. ***Toute question non numérotée ne sera pas notée !***
Bon travail !

Exercice 1

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Le but de cet exercice est de calculer M^n de trois façons indépendantes.
Ces trois méthodes étant indépendantes, ***on ne pourra pas utiliser dans l'une les résultats obtenu dans une autre.***

Méthode 1 : par calcul direct

1. Calculer J^2.
2. Exprimer pour tout entier $n \geq 1$, J^n en fonction de J. Vous justifierez votre raisonnement.
3. Exprimer M en fonction de I et J. En déduire que pour tout entier naturel n : $M^n = \frac{1}{2^n} I + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) J$.

Méthode 2 : par division euclidienne

1. Vérifier que $P(X) = X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}$ est un polynôme annulateur de M.

   Pour simplifier les calculs, on pourra écrire $M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ On note R le reste de la division euclidienne de X^n par P.
   (a) Justifier que $R(X) = aX + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer a et b.
   (c) En déduire une expression de M^n en fonction de M et I.

Méthode 3 : par raisonnement probabiliste
Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante :
si, à l'instant n, il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $n+1$ soit il y reste, avec une probabilité $\frac{2}{3}$, soit il se place sur l'un des deux autres sommets, de façon équiprobable.
On note :

- A_n l'évènement :« le mobile se trouve en A à l'instant n ».
- B_n l'évènement :« le mobile se trouve en B à l'instant n ».
- C_n l'évènement :« le mobile se trouve en C à l'instant n ».

On pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.
On pose enfin $u_n = a_n - b_n$ et $v_n = a_n - c_n$.

1. Pour tout entier naturel n, déterminer $a_n + b_n + c_n$.
2. (a) Exprimer, pour tout entier naturel n, a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) En déduire que (u_n) et (v_n) sont géométriques de raison $\frac{1}{2}$.
3. On suppose, dans cette question seulement, que le mobile se trouve en A à l'instant 0.
   (a) Calculer u_n et v_n en fonction de n.
   (b) En déduire a_n, b_n et c_n.
   (c) Démontrer alors que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ est la première colonne de M^n.
4. Expliquer comment retrouver, grâce à une méthode analogue à celle employée dans la question 3 précédente les deux autres colonnes de M^n (aucun calcul n'est demandé).

Exercice 2

Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On pose $P_\mu = X^3 + \mu X^2 + \mu X + 1$.

1. Déterminer, selon la valeur de μ la multiplicité de -1 en tant que racine de P_μ.
2. Factoriser P_μ comme produit d'un polynôme de degré 1 par un polynôme de degré 2.
3. En déduire pour quelles valeurs de μ ce polynôme est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. (*On ne cherchera pas à donner sa factorisation.*)

Finalement $\boxed{P_\mu \text{ est scindé dans} \mathbb{R}[X] \text{ si et seulement si } \mu \in \,]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[}$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & f(x) = x^2 - x\ln x - 1 \\ & f(0) = -1 \end{cases}$$

Voici un tableau de valeurs approchées de f :

x	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$f(x)$	$-0,5$	0	$0,6$	$1,6$	3	$4,7$	$6,9$	$9,5$

On considère aussi la fonction φ définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln x.$$

1. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.
2. Étudier la dérivabilité de f en 0. En donner une interprétation graphique.
3. Justifier que f est deux fois dérivables sur R_+^* et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f''(x) = 2 - \frac{1}{x}.$$

4. Dresser le tableau de variations de f' puis de f en précisant la limite de f lors que x tend vers l'infini.
5. (a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   (b) Quel est le sens de variations de f^{-1} ?
   (c) Justifier que f^{-1} est dérivable sur $]-1,+\infty[$.
   (d) Déterminer $f^{-1}(0)$ et $\left(f^{-1}\right)'(0)$.
6. (a) Justifier que pour tout entier naturel k, il existe un unique réel x_k positif, tel que

$$f(x_k) = k$$

   (b) Donner la valeur de x_0. Montrer que $1,5 < x_1 < 2$.
   (c) Exprimer x_k à l'aide de f^{-1} puis justifier que la suite (x_k) est croissante et déterminer sa limite lorsque k tend vers l'infini.
7. (a) Montrer que x_1 est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$.
   On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$$

   (b) Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) On donne $\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right) \approx 1,73$ et $\varphi(2) \approx 1,69$. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$
   (d) En étudiant les variations de φ', montrer que :

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right], \quad |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9}$$

   (e) Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - x_1| \leq \dfrac{2}{9}|u_n - x_1|$.
   (f) Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_n - x_1| \leq \left(\dfrac{2}{9}\right)^n$.
   (g) En déduire la limite de (u_n)
   (h) Écrire un programme Scilab qui demande un valeur n à l'utilisateur et affiche la valeur de u_n.
   (i) Écrire un deuxième programme Scilab qui demande une valeur p à l'utilisateur et affiche un entier n tel que $|u_n - x_1| \leq p$.