Concours Blanc n° 1 - Sujet 1

Soignez au maximum la rédaction et la présentation. ***Encadrez vos résultats***
Vous pouvez traiter les exercices dans le désordre, mais, à l'intérieur d'un exercice, vous devez traiter les questions dans l'ordre. ***Toute question non numérotée ne sera pas notée !***
Bon travail !

Exercice 1

On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Le but de cet exercice est de calculer M^n de trois façons indépendantes.
Ces trois méthodes étant indépendantes, ***on ne pourra pas utiliser dans l'une les résultats obtenu dans une autre.***

Méthode 1 : par calcul direct

1. Calculer J^2.

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

   On a donc : $\boxed{J^2 = 3J}$

2. Exprimer pour tout entier $n \geq 1$, J^n en fonction de J. Vous justifierez votre raisonnement.
   Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $J^n = 3^{n-1}J$. On note $\mathscr{P}(n)$ cette propriété.
   Initialisation $(n = 1)$:
   On a $J^1 = J$ et $3^{1-1}J = J$ donc la propriété est vraie au rang 1.
   Hérédité : Soit $n \geq 1$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$.
   On a :

$$\begin{aligned} J^{n+1} &= J \times J^n \\ &= J^{n-1}J \quad \text{par HdR} \\ &= 3^{n-1}J^2 \\ &= 3^{n-1} \times 3J \quad \text{d'après les calculs de la question 1.} \\ &= 3^n J. \end{aligned}$$

   $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie. **Conclusion :**

   Par récurrence, $\boxed{\text{Pour tout entier } n \geq 1,\ J^n = 3^{n-1}J}$

3. Exprimer M en fonction de I et J. En déduire que pour tout entier naturel n : $M^n = \frac{1}{2^n}I+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)J$.

On remarque facilement que $M = \frac{1}{2}I + \frac{1}{6}J$ (sachant que $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$).
$\frac{1}{2}I$ et $\frac{1}{6}J$ commutent puisque $\frac{1}{2}I$ commute avec toute matrice carrée d'ordre 3.
Donc, d'après la formule du binôme de Newton, on a, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
M^n = \left(\frac{1}{2}I+\frac{1}{6}J\right) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}I\right)^{n-k}\left(\frac{1}{6}J\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} I^{n-k}\times\left(\frac{1}{6}\right)^k J^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{-k} I\times\left(\frac{1}{6}\right)^k J^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\times 2^k\times\left(\frac{1}{6}\right)^k J^k \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{2}{6}\right)^k J^k \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times\frac{1}{3^k}J^k \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\binom{n}{0}\times\frac{1}{3^0}J^0+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\times\frac{1}{3^k}\times 3^{k-1}J\right) \quad \text{car pour } k\geq 1,\ J^k = 3^{k-1}J \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(I+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}\times\frac{1}{3}J\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n}I+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}\times\frac{1}{3}J\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n}I+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\right)\times\frac{1}{3}J \\
&= \frac{1}{2^n}I+\frac{1}{2^n}\left(2^n-1\right)\times\frac{1}{3}J \\
&= \frac{1}{2^n}I+\frac{1}{3}\times\frac{2^n-1}{2^n}J \\
&= \frac{1}{2^n}I+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)J
\end{aligned}$$

On a donc bien : $\boxed{M^n = \frac{1}{2^n}I+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)J}$.

Remarque : *on pouvait, bien entendu, détailler un peu moins les calculs, mais sans sauter les étapes essentielles.*

Méthode 2 : par division euclidienne

1. Vérifier que $P(X) = X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}$ est un polynôme annulateur de M.

   Pour simplifier les calculs, on pourra écrire $M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

   On calcule, comme conseillé : $M^2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 18 & 9 & 9 \\ 9 & 18 & 9 \\ 9 & 9 & 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   On a donc :

$$\begin{aligned} M^2 - \frac{3}{2}M + \frac{1}{2}I &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   On a donc bien $\boxed{M^2 - \frac{3}{2}M + \frac{1}{2}I = 0 \text{ c'est-à-dire que } P(X) = X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2} \text{ est un polynôme annulateur de } M}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ On note R le reste de la division euclidienne de X^n par P.

   (a) Justifier que $R(X) = aX + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   La division euclidienne de X^n par P s'écrit :

$$X^n = P(X)Q(X) + aX + b$$

   avec $\deg R < \deg P$ or $\deg P = 2$ donc $\deg R \leq 1$.

   Donc $\boxed{R(X) = aX + b \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2}$.

(b) Déterminer a et b.

On a, en remplaçant $R(X)$ par $aX+b$ dans la division euclidienne : $X^n = P(X)Q(X) + R(X)$.

On cherche maintenant les racines de P. On trouve facilement 1 et $\frac{1}{2}$.

On écrit alors l'égalité ci-dessus en posant successivement $X = 1$ et $X = \frac{1}{2}$. On obtient, puisque $P(1) = P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} 1^n = 0 + a + b \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 + \frac{1}{2}a + b \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} b = 1 - a \\ \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}a + 1 - a \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} b = 1 - a \\ \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2}a \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} b = 1 - a \\ a = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} b = \frac{1}{2^{n-1}} - 1 \\ a = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \end{cases}
\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{R(X) = \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)X + \frac{1}{2^{n-1}} - 1}$.

(c) En déduire une expression de M^n en fonction de M et I.

On a vu que $X^n = P(X)Q(X) + aX + b$.

On en déduit :

$$M^n = P(M)Q(M) + aM + bI$$

Or $P(M) = 0$ (car P est un polynôme annulateur de M)

Donc $M^n = aM + bI$

$$\iff \boxed{M^n = \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)M + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)I}$$

Méthode 3 : par raisonnement probabiliste

Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle ABC de la façon suivante : si, à l'instant n, il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $n+1$ soit il y reste, avec une probabilité $\frac{2}{3}$, soit il se place sur l'un des deux autres sommets, de façon équiprobable.

On note :

- A_n l'évènement :« le mobile se trouve en A à l'instant n ».
- B_n l'évènement :« le mobile se trouve en B à l'instant n ».
- C_n l'évènement :« le mobile se trouve en C à l'instant n ».

On pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

On pose enfin $u_n = a_n - b_n$ et $v_n = a_n - c_n$.

1. Pour tout entier naturel n, déterminer $a_n + b_n + c_n$.

$\{A_n, B_n, C_n\}$ est un système complet d'évènements.

Donc $P(A_n) + P(B_n) + P(C_n) = 1$

$\iff \boxed{a_n + b_n + c_n = 1}$

2. (a) Exprimer, pour tout entier naturel n, a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

D'après l'énoncé, on a :

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1}) = P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{2}{3}$$

et $P_{A_n}(B_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1}) = P_{B_n}(A_{n+1}) = P_{B_n}(C_{n+1}) = P_{C_n}(A_{n+1}) = P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{6}$

Puisque $\{A_n, B_n, C_n\}$ est un s.c.e, on applique la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{2}{3} + b_n \times \frac{1}{6} + c_n \times \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$b_{n+1} = P(B_{n+1}) = P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) + P(C_n \cap B_{n+1})$$

$$= P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(B_{n+1})$$

$$= a_n \times \frac{1}{6} + b_n \times \frac{2}{3} + c_n \times \frac{1}{6}.$$

$$c_{n+1} = P(C_{n+1}) = P(A_n \cap C_{n+1}) + P(B_n \cap C_{n+1}) + P(C_n \cap C_{n+1})$$

$$= P(A_n) \times P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(C_{n+1})$$

$$= a_n \times \frac{1}{6} + b_n \times \frac{1}{6} + c_n \times \frac{2}{3}.$$

On a donc :

$$\boxed{\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{6} b_n + \frac{1}{6} c_n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{6} a_n + \frac{2}{3} b_n + \frac{1}{6} c_n \\ c_{n+1} &= \frac{1}{6} a_n + \frac{1}{6} b_n + \frac{2}{3} c_n \end{aligned}}$$

(b) En déduire que (u_n) et (v_n) sont géométriques de raison $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a_{n+1} - b_{n+1} \\ &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}c_n - \left(\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6}c_n\right) \\ &= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) a_n + \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right) b_n \\ &= \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}b_n = \frac{1}{2}u_n. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est bien géométrique de raison } \frac{1}{2}}$

De même, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= a_{n+1} - c_{n+1} \\ &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}c_n - \left(\frac{1}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{2}{3}c_n\right) \\ &= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) a_n + \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right) c_n \\ &= \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}c_n = \frac{1}{2}v_n. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est bien géométrique de raison } \frac{1}{2}}$

3. On suppose, dans cette question seulement, que le mobile se trouve en A à l'instant 0.

   (a) Calculer u_n et v_n en fonction de n.
   (u_n) et (v_n) sont géométriques de raison $\frac{1}{2}$ donc, pour tout $n \geq 0$, $u_n = u_0\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{u_0}{2^n}$ et $v_n = v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{v_0}{2^n}$.
   Or le mobile se trouve en A à l'instant 0, donc $P(A_0) = 1$ et $P(B_0) = P(C_0) = 0$.
   D'où $u_0 = a_0 - b_0 = 1 - 0 = 1$ et $v_0 = a_0 - c_0 = 1 - 0 = 1$. Donc :

   $$\boxed{\text{pour tout } n \geq 0,\ u_n = \frac{1}{2^n} \text{ et } v_n = \frac{1}{2^n}.}$$

   (b) En déduire a_n, b_n et c_n.
   On a :

$$\begin{cases} u_n &= \dfrac{1}{2^n} \\ v_n &= \dfrac{1}{2^n} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a_n - b_n &= \dfrac{1}{2^n} \\ a_n - c_n &= \dfrac{1}{2^n} \end{cases}$$

   Or $a_n + b_n + c_n = 1$ donc $c_n = 1 - a_n - b_n$, d'où :

$$\begin{cases} a_n - b_n = \dfrac{1}{2^n} \\ a_n - (1 - a_n - b_n) = \dfrac{1}{2^n} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a_n - b_n = \dfrac{1}{2^n} \\ a_n - (1 - a_n - b_n) = \dfrac{1}{2^n} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a_n - b_n = \dfrac{1}{2^n} \\ 2a_n + b_n = \dfrac{1}{2^n} + 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3a_n &= 2 \times \dfrac{1}{2^n} + 1 & (L_1 \leftarrow L_1 + L_2) \\ 3b_n &= 1 - \dfrac{1}{2^n} & (L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a_n &= \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2^{n-1}} + 1\right) \\ b_n &= \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) \end{cases}$$

   Et on a

$$\begin{aligned} c_n &= 1 - a_n - b_n \\ &= 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n-1}} + 1\right) - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \end{aligned}$$

   on a donc finalement :

$$\boxed{\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2^{n-1}} + 1\right) \\ b_n = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) \\ c_n = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) \end{cases}}$$

(c) Démontrer alors que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ est la première colonne de M^n.

On remarque que le résultat donné à la question 2.a peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

On a donc, par une récurrence immédiate : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.

Or ici $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est la première colonne de M^n.

Donc $\boxed{\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \text{ est la première colonne de } M^n.}$

4. Expliquer comment retrouver, grâce à une méthode analogue à celle employée dans la question 3 précédente les deux autres colonnes de M^n (aucun calcul n'est demandé).

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont respectivement la deuxième et la troisième colonne de M^n.

Donner la troisième colonne, de M^n, revient à donner a_n, b_n et c_n dans le cas où le mobile est au point B à l'instant 0. **Mais on peut obtenir le résultat sans aucun calcul !** En effet, en renommant les sommets du triangle de cette façon $A' = B$ et $B' = A$ et $C' = C$, on est ramené exactement à la même situation que précédemment.

La deuxième colonne de M^n est donc :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n-1}} + 1\right) \\ \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \end{pmatrix}.$$

Donner la troisième colonne, de M^n, revient à donner a_n, b_n et c_n en considérant que le mobile est au point C à l'instant 0. Mais là encore, aucun calcul n'est nécessaire. Il suffit « d'échanger » A et C pour être ramené à la première situation. La troisième colonne de M^n est donc :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\ \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n-1}} + 1\right) \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On pose $P_\mu = X^3 + \mu X^2 + \mu X + 1$.

1. Déterminer, selon la valeur de μ la multiplicité de -1 en tant que racine de P_μ.
   $P_\mu(-1) = -1 + \mu - \mu + 1 = 0$ donc -1 est racine de P_μ.
   $P_\mu'(X) = 3X^2 + 2\mu X + \mu$.
   Donc $P_\mu'(-1) = 3 - 2\mu + \mu = 3 - \mu$.
   Donc -1 est racine au moins double si et seulement si $\mu = 3$.
   Enfin, $P_\mu''(X) = 6X + 2\mu$. Donc $P_\mu''(-1) = -6 + 2\mu$ donc si $\mu = 3$, -1 est racine triple.
   Finalement :

$$\boxed{\text{Si } \mu \in \mathbb{R} \setminus \{3\},\ -1 \text{ est racine simple de } P_\mu \text{ et si } \mu = 3,\ -1 \text{ est racine triple.}}$$

2. Factoriser P_μ comme produit d'un polynôme de degré 1 par un polynôme de degré 2.
   Quelque soit μ, -1 est racine de P_μ et donc $X+1$ divise P_μ. On obtient le quotient, par exemple en posant la division euclidienne :

$$\begin{array}{l|l}
X^3 + \mu X^2 + \mu X + 1 & X+1 \\
\hline
-(X^3 + X^2) & X^2 + (\mu-1)X + 1 \\
\quad (\mu-1)X^2 + \mu X + 1 & \\
-\left((\mu-1)X^2 + (\mu-1)X\right) & \\
\quad\quad X + 1 &
\end{array}$$

   On a donc :

$$\boxed{P_\mu(X) = (X+1)(X^2 + (\mu-1)X + 1)}$$

3. En déduire pour quelles valeurs de μ ce polynôme est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. (*On ne cherchera pas à donner sa factorisation.*)
   On rappelle qu'un polynôme est dit "scindé" si on peut l'exprimer comme produit de polynômes de degré 1.
   $P\mu$ est donc scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si $X^2 + (\mu-1)X + 1$ est scindé, c'est-à-dire s'il se factorise dans $\mathbb{R}[X]$, c'est-à-dire s'il a des racines réelles. On calcule donc son discriminant :

$$\Delta = (\mu-1)^2 - 4 = \mu^2 - 2\mu + 1 - 4 = \mu^2 - 2\mu - 3.$$

   Donc $X^2 + (\mu-1)X + \mu$ a des racines réelles si et seulement si $\mu^2 - 2\mu - 3 \geq 0$.
   Or $\mu^2 - 2\mu - 3$ est lui-même un trinôme en μ dont le discriminant δ vaut $\delta = (-2)^2 - 4 \times (-3) = 16 > 0$.
   Il y a donc deux racines réelles (attention : ce sont les racines de $\mu^2 - 2\mu - 3$, pas de$X^2 + (\mu-1)X + \mu$!) : $\mu_1 = \dfrac{2-4}{2} = -1$ et $\mu_2 = 3$. On a donc le tableau de signes suivant :

μ	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$\Delta = \mu^2 - 2\mu - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Finalement $\boxed{P_\mu \text{ est scindé dans} \mathbb{R}[X] \text{ si et seulement si } \mu \in]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[}$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & f(x) = x^2 - x\ln x - 1 \\ & f(0) = -1 \end{cases}$$

Voici un tableau de valeurs approchées de f :

x	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$f(x)$	$-0,5$	0	$0,6$	$1,6$	3	$4,7$	$6,9$	$9,5$

On considère aussi la fonction φ définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln x.$$

1. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

   (a) f est continue sur $]0,+\infty[$ comme différence et produit de fonctions continues.

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$ car $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ par croissance comparée.
   On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

   D'où $\boxed{f \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$

2. Étudier la dérivabilité de f en 0. En donner une interprétation graphique.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x\ln x - 1 - (-1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x\ln x}{x} = \lim_{x\to 0} x - \ln x = -\infty.$$

   Le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(0}{x-0}$ a une limite infinie quand x tend vers 0 donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$

   Graphiquement, $\boxed{\text{la courbe de } f \text{ a une tangente verticale en } 0.}$

3. Justifier que f est deux fois dérivables sur R_+^* et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f''(x) = 2 - \frac{1}{x}.$$

   f est deux fois dérivables sur R_+^* comme différence et produit de fonctions deux fois dérivables.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) &= 2x - (1\times \ln x + x \times \frac{1}{x}) \\ &= 2x - \ln x - 1 \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f''(x) = 2 - \frac{1}{x}.$$

   On a donc bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f''(x) = 2 - \frac{1}{x}.}$$

4. Dresser le tableau de variations de f' puis de f en précisant la limite de f lors que x tend vers l'infini.
On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f''(x) = \dfrac{2x-1}{x}$ or $x > 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $2x - 1$.
De plus $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) - 1 = \ln 2$.
D'où le tableau :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'(x)		$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	

Or $\ln 2 > 0$, donc, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) > 0$ d'où le tableau :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f(x)	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Le calcul de la limite de f en $+\infty$ est le suivant :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 - x\ln x - 1 = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x^2} = 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par croissance comparée.
Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

5. (a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.
f est continue (d'après la question 1) et strictement croissante (d'après la question 4) sur $[0, +\infty[$ et $f([0, +\infty[) = [-1, +\infty[$.
$\boxed{\text{Donc } f \text{ réalise une bijection de } [0, +\infty[\text{ sur } J = [-1, +\infty[.}$

(b) Quel est le sens de variations de f^{-1} ?
f^{-1} a même monotonie que f donc $\boxed{f^{-1} \text{ est strictement croissante.}}$

(c) Justifier que f^{-1} est dérivable sur $]-1, +\infty[$.
f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée ne s'annule pas sur cet intervalle (d'après le tableau de variations de f' vu à la question 4). Or $f\,(]0, +\infty[) =]-1, +\infty[$.
Donc $\boxed{f^{-1} \text{ est dérivable sur }]-1, +\infty[.}$

(d) Déterminer $f^{-1}(0)$ et $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

On remarque que $f(1) = 1 - 0 - 1 = 0$ donc $\boxed{f^{-1}(0) = 1}$.

De plus :

$$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(0)\right)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2-0-1} = 1$$

On a donc $\boxed{\left(f^{-1}\right)'(0) = 1}$.

6. (a) Justifier que pour tout entier naturel k, il existe un unique réel x_k positif, tel que

$$f(x_k) = k$$

Soit $k \in \mathbb{N}$.
On a vu que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $J = [-1, +\infty[$ or $k \in [-1, +\infty[$.

Donc $\boxed{\text{il existe un unique réel } x_k \in [0, +\infty[, \text{ tel que } f(x_k) = k}$

(b) Donner la valeur de x_0. Montrer que $1,5 < x_1 < 2$.

On vu que $f(1) = 0$ donc $\boxed{x_0 = 1}$.

Le tableau de valeur de f nous apprend que $f(1,5) < 1 < f(2)$.
Ce qui s'écrit encore : $f(1,5) < f(x_1) < f(2)$.

Donc, par stricte croissance de f : $\boxed{1,5 < x_1 < 2.}$

(c) Exprimer x_k à l'aide de f^{-1} puis justifier que la suite (x_k) est croissante et déterminer sa limite lorsque k tend vers l'infini.

$f(x_k) = k$ donc $\boxed{x_k = f^{-1}(k)}$.

On a $k < k+1$ donc, par stricte croissance de f^{-1} : $f^{-1}(k) < f^{-1}(k+1)$.

Ce qui équivaut à :$x_k < x_{k+1}$. Donc $\boxed{\text{la suite } (x_k) \text{ est strictement croissante.}}$

$\forall k \in \mathbb{N}, x_k = f^{-1}(k)$.

Or $\lim\limits_{k \to +\infty} k = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{k \to +\infty} x_k = +\infty.}$

7. (a) Montrer que x_1 est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$.

x_1 est, par définition, l'unique solution sur R_+^* de l'équation $f(x) = 1$. Or , pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\iff x^2 - x\ln x - 1 = 1 \\ &\iff x^2 = 2 + x\ln x \\ &\iff x = \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \quad \text{car } x > 0 \end{aligned}$$

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$$

(b) Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-2+x}{x^2}$.
De plus $\varphi(2) = 1 + \ln 2$. D'où le tableau :

x	0		2		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$		$\searrow$	$1+\ln 2$	$\nearrow$	

(c) On donne $\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right) \approx 1,73$ et $\varphi(2) \approx 1,69$. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$

On va montrer ce résultat par récurrence. On note $\mathscr{P}(n)$ la propriété $u_n \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$.

Initialisation ($n = 0$) :

On a $u_0 = \dfrac{3}{2}$ donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$.

On a : $\dfrac{3}{2} \leq u_n \leq 2$

Donc $\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right) \geq \varphi(u_n) \geq \varphi(2)$ par stricte décroissance de φ sur $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$.

Or $\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right) < 2$, $\varphi(2) > \dfrac{3}{2}$ et $\varphi(u_n) = u_{n+1}$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion :

Par récurrence, $\boxed{\text{Pour tout entier } n \geq 0,\ u_n \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]}$

(d) En étudiant les variations de φ', montrer que :

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right], \quad |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9}$$

φ' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi''(x) = -2 \times \dfrac{-2}{x^3} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{4-x}{x^3}$.

De plus, $\varphi'\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{8}{9} + \dfrac{6}{9} = -\dfrac{2}{9}$ et $\varphi'(2) = -\dfrac{2}{2^2} + \dfrac{1}{2} = 0$.

On a donc le tableau suivant :

x	0	$\frac{3}{2}$	2	4		$+\infty$
$\varphi''(x)$		$+$		0	$-$	
$\varphi'(x)$	$\nearrow$	$-\frac{2}{9}$	0	$\nearrow$	$\searrow$	

φ' est donc croissante sur $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$ donc, pour tout $x \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$:

$$\varphi'\left(\frac{3}{2}\right) \leq \varphi'(x) \leq \varphi'(2) \iff \qquad -\frac{2}{9} \leq \varphi'(x) \leq 0$$

Et donc :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right],\ |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9}}$$

(e) Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9} |u_n - x_1|$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

φ est définie et dérivable sur $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ or u_n et x_1 sont dans cet intervalle.

De plus, pour tout $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$, $|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9}$.

Donc, par l'inégalité des accroissements finis,

$$|\varphi(u_n) - \varphi(x_1)| \leq \frac{2}{9} |u_n - x_1|$$

Or $\varphi(u_n) = u_{n+1}$ et $\varphi(x_1) = x_1$. Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9} |u_n - x_1|}$$

(f) Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n$.

On va montrer ce résultat par récurrence. On note $\mathscr{P}(n)$ cette propriété.

Initialisation ($n = 0$) :

$\left(\frac{2}{9}\right)^0 = 1$ or u_0 et x_1 sont dans l'intervalle $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ donc leur distance $|u_0 - x_1|$ est inférieure à 1.

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$.

On a : $|u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9} |u_n - x_1|$ d'après la question 7.e. Or $|u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n$ par HdR.

Donc $\frac{2}{9} |u_n - x_1| \leq \frac{2}{9} \left(\frac{2}{9}\right)^n = \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}$ On a donc $|u_{n+1} - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}$ Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion :

Par récurrence, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, \ |u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n.}$

(g) En déduire la limite de (u_n)

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{2}{9} < 1$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - x_1| = 0$.

D'où : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_1.}$

(h) Écrire un programme Scilab qui demande un valeur n à l'utilisateur et affiche la valeur de u_n.

```
n=input("Entrez une valeur de n : ")
u=3/2
for k =1:n
    u= 2/u+log(u)
end
disp("u_n vaut : ",u)
```

(i) Écrire un deuxième programme Scilab qui demande une valeur p à l'utilisateur et affiche un entier n tel que $|u_n - x_1| \leq p$.

```
p=input("Entrez une valeur de p : ")
u=3/2
n=0
while (2/9)^n>p
    u= 2/u+log(u)
    n=n+1
end
disp("n vaut : ",n)
```