Concours Blanc n° 1 - Sujet 2

Soignez au maximum la rédaction et la présentation. ***Encadrez vos résultats***
Vous pouvez traiter les exercices dans le désordre, mais, à l'intérieur d'un exercice, vous devez traiter les questions dans l'ordre. ***Toute question non numérotée ne sera pas notée !***
Bon travail !

Exercice 1

Pour un examen, dix examinateurs ont préparé chacun 2 sujets. On dispose donc de 20 sujets que l'on place dans 20 enveloppes identiques. Deux candidats se présentent successivement. Le premier choisit au hasard deux sujets simultanément puis le second candidat choisit lui aussi deux sujets (simultanément) parmi ceux non choisis par le premier candidat.
On note :

- A_1 l'évènement "les deux sujets choisis par le candidat 1 ont été préparés par le même examinateur".
- A_2 l'évènement "les deux sujets choisis par le candidat 2 ont été préparés par le même examinateur".

1. Donner le nombre total de tirage différents que peut réaliser le premier candidat.
2. Démontrer que $P(A_1) = \dfrac{1}{19}$.
3. (a) Déterminer $P_{A_1}(A_2)$.
   (b) Montrer que la probabilité que les deux candidats obtiennent chacun deux sujets provenant d'un même examinateur est égale à $\dfrac{1}{323}$.
4. (a) Justifier que $P_{\overline{A_1}}(A_2) =$.
   (b) Calculer $P(A_2)$ puis en déduire que $P(A_1 \cup A_2) = \dfrac{33}{323}$.

Exercice 2

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

1. Vérifier que $C_0 = 1$. Calculer C_1 et C_2.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Vérifier que $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$

   (b) En déduire que $\binom{2n}{n-1} = \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}$

   (c) En déduire que $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$.

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)C_{n+1} = (4n+2)C_n$.

4. On définit maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} k C_k C_{n-k}.$$

   Le but de cette question est de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = S_n$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} + S_{n+1} = C_{n+1} + \sum_{k=0}^{n}(k+2)C_{k+1}C_{n-k}$.

   (b) Établi par ailleurs que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2T_n = nS_n$. Pour cela, on montrera que $T_n = nS_n - T_n$ en utilisant le changement d'indice $k' = n - k$.

   (c) Déduire des deux questions précédentes et de la question 3 que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+1} + S_{n+1} = C_{n+1} + (2n+2)S_n.$$

   (d) Démontrer maintenant par récurrence le résultat voulu, à savoir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = S_n$. Pour l'hérédité, vous pourrez utiliser les résultats des questions 4c, 4b et 2.

Problème : matrices diagonalisables

Soit n un entier naturel non nul.
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *diagonalisable* s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}AP = D$$

où D est une matrice diagonale d'ordre n.

Partie 1 : exemple de matrice diagonalisable et applications

On pose $A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Vérifier que A est diagonalisable en vérifiant que $P^{-1}AP{=}D$.
3. **Application : Recherche des « racines carrées de A ».**
   On se propose dans cette partie de déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.
   On pose :
   $$\mathscr{E} = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,\middle|\, M^2 = A \right\}.$$
   Le but est donc de déterminer toutes les matrices M de $\mathscr{E}$.

   (a) Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ où $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ sont des réels quelconques.
   Démontrer que N commute avec D si et seulement si N est diagonale.

   (b) On considère une matrice $M \in \mathscr{E}$. On a donc $M^2 = A$.
   On pose $N = P^{-1}MP$.

   i. Vérifier que $N^2 = D$.

   ii. En déduire que N commute avec D.

   iii. En déduire que $N \in \left\{ N_1, N_2, N_3, N_4 \right\}$ avec :
   $$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, N_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

   iv. En déduire que $M \in \left\{ M_1, M_2, M_3, M_4 \right\}$ où on exprimera, pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, M_i en fonction de P, N_i et P^{-1}. **On ne cherchera pas à donner les coefficients des matrices M_i.**

   (c) Vérifier que réciproquement, si $M \in \left\{ M_1, M_2, M_3, M_4 \right\}$ alors alors $M \in \mathscr{E}$. En déduire $\mathscr{E}$.

   (d) **Somme et produit de racines carrées**

   i. Déterminer $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} M_i$.

   ii. Exprimer $\displaystyle\prod_{i=1}^{4} M_i$ en fonction de A.

Partie 2 : exemple de matrice non diagonalisable

on pose $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On admettra que $B^3 - 6B^2 = 18I$ où I la matrice identité d'ordre 3.
On va démontrer par l'absurde que B n'est pas diagonalisable.
On suppose donc qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que $P^{-1}BP = D$.

On pose $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout polynôme $f \in \mathbb{R}_n[X]$, où $n \in \mathbb{N}$, $f(D) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & f(\lambda_3) \end{pmatrix}$. Pour cela, on posera :
$$f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$
2. On pose à partir de maintenant $f(x) = x^3 - 6x^2 - 18$. Montrer que f possède une et une seule racine réelle α. **On ne demande pas de déterminer α.**
3. Démontrer que f est un polynôme annulateur de D.
4. En déduire, à l'aide de la question 1, que $D = \alpha I$.
5. En déduire une contradiction.

Remarque : *dans cette deuxième partie, on a démontré qu'une matrice non égale à k fois l'identité qui possède un polynôme annulateur ayant une seule racine (on dira qu'une telle matrice ne possède qu'une seule valeur propre) n'est pas diagonalisable. Le raisonnement utilisé ici et un raisonnement classique qu'il sera utile de retenir l'année prochaine...*