CB1 - Sujet 2
Correction

Exercice 1

1) Le premier candidat tire 2 sujets parmi 20, simultanément.
Il s'agit donc d'un tirage sans ordre et sans répétition de 2 éléments parmi 20.

$$\boxed{\text{Il y a } \binom{20}{2} \text{ tirages possibles}}$$

2) Il y a 10 tirages où les 2 sujets ont été conçus par le même examinateur.

Donc $P(A_1) = \dfrac{10}{\binom{20}{2}} = \dfrac{10}{\frac{20\times 19}{2}} = \dfrac{10}{10\times 19} = \dfrac{1}{19}$

On a donc bien :

$$\boxed{P(A_1) = \frac{1}{19}}.$$

3) a) Si A_1 s'est réalisé, cela signifie que le candidat 1 a tiré 2 sujets préparés par le même examinateur.

Parmi les $\binom{18}{2}$ tirages possibles pour le candidat 2, il y en a donc 9 avec les 2 sujets provenant du même examinateur.

Donc $P_{A_1}(A_2) = \dfrac{9}{\binom{18}{2}} = \dfrac{9}{\frac{18 \times 17}{2}} = \dfrac{9}{9 \times 17} = \dfrac{1}{17}$

$$\boxed{P_{A_1}(A_2) = \frac{1}{17}}$$

b) On cherche $P(A_1 \cap A_2)$.

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2)$

$= \dfrac{1}{19} \times \dfrac{1}{17}$

$= \dfrac{1}{323}$

$\boxed{\text{La probabilité pour que les deux candidats obtiennent chacun 2 sujets provenant du même examinateur est donc bien de } \frac{1}{323}}$

4) a) Si A_1 s'est réalisé, cela signifie que le candidat 1 a tiré 2 sujets préparés par deux examinateurs différents.

Parmi les $\binom{18}{2}$ tirages possibles pour le candidat 2, il y en a donc 8 avec les 2 sujets provenant du même examinateur.

Donc $P_{\overline{A_1}}(A_2) = \dfrac{8}{\binom{18}{2}} = \dfrac{8}{\frac{18\times 17}{2}} = \dfrac{8}{9\times 17}$

$$\boxed{P_{\overline{A_1}}(A_2) = \frac{8}{9\times 17}}$$

b) $\{A_1, \overline{A_1}\}$ forme un s.c.e. donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_2) = P(A_1\cap A_2) + P(\overline{A_1}\cap A_2) = P(A_1)\times P_{A_1}(A_2) + P(\overline{A_1})\times P_{\overline{A_1}}(A_2)$$

$$= \frac{1}{19}\times\frac{1}{17} + \frac{\overset{2}{\cancel{18}}}{19}\times\frac{8}{\cancel{9}\times 17}$$

$$= \frac{1}{323} + \frac{16}{323}$$

$$\boxed{= \frac{17}{323}}$$

$$P(A_1\cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1\cap A_2) = \frac{1}{19} + \frac{17}{323} - \frac{1}{323}$$

$$= \frac{17}{323} + \frac{17}{323} - \frac{1}{323} = \boxed{\frac{33}{323}}$$

Exercice 2

1) $C_0 = \frac{1}{0+1}\binom{0}{0}$ Or $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,0!} = 1$

On a dnc bien $\boxed{C_0 = 1}$

$C_1 = \frac{1}{2}\binom{2}{1} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ Dnc $\boxed{C_1 = 1}$

$C_2 = \frac{1}{3} \times \binom{4}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{4 \times 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Dnc $\boxed{C_2 = 2}$

2) a) $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!} = \boxed{\frac{(2n)!}{n!\,n!}}$

b) $\binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(2n-(n-1))!} = \frac{(2n)!}{(n-1)!\,\underbrace{(n+1)!}_{(n+1)\,n!}} = \frac{n\,(2n)!}{\underbrace{n\,(n-1)!}_{n!} \times (n+1)\,n!}$

$= \frac{n\,(2n)!}{n! \times (n+1)\,n!}$

$= \frac{n}{n+1} \times \frac{(2n)!}{n!\,n!}$

On a dnc bien : $\boxed{\binom{2n}{n-1} = \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}}$

c) On a : $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}$

$$= \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\binom{2n}{n}$$

$$= \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

$$= C_n$$

On a donc bien :

$$\boxed{C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.}$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2)\,C_{n+1} = \cancel{(n+2)} \times \frac{1}{\cancel{n+2}}\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!}$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1) \times (2n)!}{(n+1) \times n! \times (n+1) \times n!}$$

$$= \frac{2\cancel{(n+1)}(2n+1)}{(n+1)\cancel{(n+1)}} \times \frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

$$= 2(2n+1) \times \frac{1}{n+1} \times \binom{2n}{n}$$

$$= (4n+2)\,C_n$$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)\,C_{n+1} = (4n+2)\,C_n}$

4)

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+1} + S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_k C_{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1} k C_k C_{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} (1+k) C_k C_{n+1-k}$$

$$= C_0 C_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (k+1) C_k C_{n+1-k}$$

$C_0 = \binom{0}{0} = 1$

et

on a fait le changement d'indice $k' = k-1$

$$= C_{n+1} + \sum_{k'=0}^{n} (k'+2) C_{k'+1} C_{n+1-(k'+1)}$$

$$= C_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (k+2) C_{k+1} C_{n-k}$$

On a donc bien :

$$\boxed{T_{n+1} + S_{n+1} = C_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (k+2) C_{k+1} C_{n-k}}$$

4b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} k C_k C_{n-k}$$

$$= \sum_{k'=0}^{n} (n-k') C_{n-k'} C_{k'}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} n C_{n-k} C_k - k C_{n-k} C_k$$

$$= n \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} - \sum_{k=0}^{n} k C_k C_{n-k}$$

$$= n S_n - T_n$$

On a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = n S_n - T_n$

On en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 2T_n = n S_n}$

4c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+1} + S_{n+1} = C_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (k+2) C_{k+1} C_{n-k}$$

$$= C_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (4k+2) C_k C_{n-k}$$

$$= C_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} 4k C_k C_{n-k} + 2 C_k C_{n-k}$$

$$= C_{n+1} + 4 \sum_{k=0}^{n} k C_k C_{n-k} + 2 \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

$$= C_{n+1} + 4 T_n + 2 S_n$$

$$= C_{n+1} + 2n S_n + 2 S_n$$

$$= C_{n+1} + (2n+2) S_n .$$

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+1} + S_{n+1} = C_{n+1} + (2n+2) S_n}$$

4d) On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$C_{n+1} = S_n$".

Initialisation $(n=0)$

$C_{0+1} = C_1 = 1$ et $S_0 = \sum_{k=0}^{0} C_k C_{0-k} = C_0 \times C_0 = 1$.

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$

On a $T_{n+1} + S_{n+1} = C_{n+1} + (2n+2) S_n$.

Or $S_n = C_{n+1}$ par HdR,

donc $T_{n+1} + S_{n+1} = (2n+3) C_{n+1}$.

Or $T_{n+1} = \frac{n+1}{2} S_{n+1}$, d'après la question 4b.

D'où $\frac{n+3}{2} S_{n+1} = (2n+3) C_{n+1}$

$\Longleftrightarrow \quad S_{n+1} = \frac{2(2n+3)}{n+3} C_{n+1}$.

Or, d'après la question 3, $(n+3) C_{n+2} = (4(n+1)+2) C_{n+1}$

$\Longleftrightarrow \quad C_{n+2} = \frac{4n+6}{n+3} C_{n+1}$.

On a donc $S_{n+1} = C_{n+2}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion :

Par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = S_n}$

Problème

1) On résout l'équation $PX = Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$PX = 0 \iff \begin{cases} x - z = a \\ -2x + y + z = b \\ 2x + y - 2z = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - z = a \\ y - z = b + 2a & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ y = c - 2a & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - z = a \\ y = c - 2a \\ z = c - 2a - (b + 2a) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -3a - b + c \\ y = -2a + c \\ z = -4a - b + c \end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

2)

$$AP = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On a donc bien $\boxed{P^{-1}AP = D}$

Donc $\boxed{\text{A est diagonalisable}}$

3) a)

N commute avec D si et seulement si $ND = DN$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ 0 & e & 4f \\ 0 & h & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} b=0 \\ c=0 \\ d=0 \\ e=e \\ 4f=f \\ 0=4g \\ h=4h \\ 4i=4i \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b=0 \\ c=0 \\ d=0 \\ f=0 \\ g=0 \\ h=0 \end{cases}$$

$\iff$ N est diagonale.

Donc $\boxed{\text{N commute avec D si et seulement si N est diagonale}}$

3bi)

$$N^2 = (P^{-1}MP)^2 = P^{-1}M\underbrace{PP^{-1}}_{I_3}MP = P^{-1}MMP = P^{-1}M^2P = P^{-1}AP = D.$$

On a donc $\boxed{N^2 = D}$

3bii) $ND = NN^2 = NNN = N^2N = DN$

Donc $\boxed{N \text{ commute avec } D.}$

3biii) N commute avec D donc, d'après la question 3a,
N est diagonale

Donc $N = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Or $N^2 = D$

$$\iff \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta^2 = 1 \\ \gamma^2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta \in \{-1,1\} \\ \gamma \in \{-2,2\} \end{cases}$$

On a donc bien $\boxed{N \in \{N_1, N_2, N_3, N_4\}.}$

3biv) On a $N = P^{-1}MP$ donc $M = PNP^{-1}$ avec $N \in \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$

Donc $M = PN_1P^{-1}$ ou $M = PN_2P^{-1}$ ou $M = PN_3P^{-1}$ ou $M = PN_4P^{-1}$.

On a donc $\boxed{M \in \{M_1, M_2, M_3, M_4\} \text{ où } \forall i \in [\![1,4]\!],\ M_i = PN_iP^{-1}}$

3c) Supposons que $M = PN_iP^{-1}$ avec $i \in [\![1,4]\!]$.

alors $M^2 = PN_iP^{-1}PN_iP^{-1} = PN_i^2P^{-1}$.

Or $\forall i \in [\![1,4]\!]$, $N_i^2 = D$. Donc $M^2 = PDP^{-1} = A$.

Donc $\boxed{\text{Si } M \in \{M_i, i \in [\![1,4]\!]\}, \text{ alors } M \in \mathcal{E}}$

D'où :

$$\boxed{\mathcal{E} = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}.}$$

(3.d.i) $\sum_{i=1}^{4} M = \sum_{i=1}^{4} P N_i P^{-1}$

$= P\left(\sum_{i=1}^{4} N_i\right) P^{-1}$

Or $\sum_{i=1}^{4} N_i = 0$

dmc $\boxed{\sum_{i=1}^{4} M_i = 0}$

(3.d.ii) $\prod_{i=1}^{4} M_i = M_1 M_2 M_3 M_4$

$= P N_1 \underbrace{P^{-1} P}_{I_3} N_2 \underbrace{P^{-1} P}_{I_3} N_3 \underbrace{P^{-1} P}_{I_3} N_4 P^{-1}$

$= P N_1 N_2 N_3 N_4 P^{-1}$

Or N_1, N_2, N_3, N_4 étant diagonales, elle se multiplient coefficient par coefficient

Dmc $N_1 N_2 N_3 N_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = D^2$

D'où $\prod_{i=1}^{4} M_i = P D^2 P^{-1}$

$= P D P^{-1} P D P^{-1}$

$= A \times A$

$= A^2$

D'où : $\boxed{\prod_{i=1}^{4} M_i = A^2}$

Partie 2

1. $$f(D) = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} a_k\lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & a_k\lambda_2^k & 0 \\ 0 & 0 & a_k\lambda_3^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda_3^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & f(\lambda_3) \end{pmatrix}$$

On a donc bien $\boxed{f(D) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & f(\lambda_3) \end{pmatrix}}$

2. On étudie les variations de f.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$

or $f(0) = -18$ et $f(4) = 4^3 - 6\times 4^2 - 18 = 4^2 \times (-2) - 18 = -50$

D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	-18	$\searrow$	-50	$\nearrow$	$+\infty$

Avec $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

D'après ce tableau, f est strictement négative sur $]-\infty, 4]$.

Donc f n'admet pas de racine sur $]-\infty, 4]$

f est continue et strictement croissante sur $[4, +\infty[$, donc elle réalise une bijection de $[4, +\infty[$ sur $f([4,+\infty[) = [-50, +\infty[$.

Donc f possède une et une seule racine sur $[4, +\infty[$.

Au final :

$$\boxed{f \text{ possède une unique racine sur } \mathbb{R}.}$$

3.

$$f(D) = D^3 - 6D^2 - 18I$$

$$= (P^{-1}BP)^3 - 6(PBP^{-1})^2 - 18I$$

$$= P^{-1}B\underbrace{PP^{-1}}_{I}B\underbrace{PP^{-1}}_{I}BP - 6P^{-1}B\underbrace{PP^{-1}}_{I}BP - 18I$$

$$= P^{-1}B^3P - 6P^{-1}B^2P - 18P^{-1}P$$

$$= P^{-1}(B^3P - 6BP - 18P)$$

$$= P^{-1}(\underbrace{B^3 - 6B - 18I}_{0})P = 0$$

Donc $\boxed{f \text{ est un polynôme annulateur de } D}$

4) On a $f(D) = 0$

Or $f(D) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & f(\lambda_3) \end{pmatrix}$

Donc $\forall i \in \{1,2,3\}$, $f(\lambda_i) = 0$

Donc $\forall i \in \{1,2,3\}$, $\lambda_i = \alpha$

D'où $\boxed{D = \alpha I}$

5. On a $D = \alpha I$

Or $B = PDP^{-1}$

donc $B = P\alpha I P^{-1} = \alpha P I P^{-1} = \alpha P P^{-1} = \alpha I$

On a $\boxed{B = \alpha I \quad \text{or} \quad B \neq \alpha I \ : \text{contradiction !}}$