Programme de colle n° 13
Semaine du 18/01/2021
Probabilités sur un univers fini

Question de cours

La colle commencera par une question de cours parmi celles-ci-dessous. Les questions marquées $(*)$ sont réservées à ceux ayant eu plus de 10 au dernier devoir.

1. Donner la définition d'un évènement. Illustrer cette notion par un exemple. Qu'appelle-t-on l'évènement impossible ? L'évènement certain ? les évènements élémentaires.
   Réponse attendue :
   Un évènement est une partie (c'est-à-dire un sous ensemble) de l'univers. Par exemple, si on lance un dé à 6 faces. l'univers est l'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et l'évènement "obtenir un résultat pair" est la partie $\{2, 4, 6\}$.
   L'évènement impossible est l'ensemble vide $\emptyset$.
   L'évènement certain est l'univers Ω tout entier.
   Les évènements élémentaires sont les évènements ne contenant qu'une seule issue.

2. Qu'appelle-t-on un système complet d'évènement ?
   Réponse attendue :
   C'est une famille $\Big(A_1, A_2, \cdots, A_n\Big)$ d'évènements tels que :
   (a) $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset$
   (b) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.

3. On lance un dé à 6 faces, comment note-t-on la probabilité d'obtenir le nombre 1 ? Que peut-on dire de $\sum\limits_{i=1}^{6} P(\{i\})$?
   Réponse attendue :
   La probabilité d'obtenir 1 est la probabilité de l'évènement $\{1\}$ et **se note donc** $P(\{1\})$ (et pas $P(1)$). On a $P(\{1\} + P(\{2\} + \cdots + P(\{6\} = 1$.

4. Comment calcule-t-on la probabilité d'un évènement à l'aide des probabilités élémentaires ? Que donne ce calcul en cas d'équiprobabilité ? Que signifie qu'on est dans une situation d'équiprobabilité ?
   Réponse attendue :
   La probabilité d'un évènements est égale à la somme des probabilité des évènements élémentaires qu'il contient.
   Par exemple : $P(a, b, c) = P(\{a\} + P(\{b\} + P(\{c\}$. On est dans une situation d'équiprobabilité si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité. Dans ce das, la probabilité d'un évènement A est donnée par :
$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}.$$

5. Donner les formules permettant de calculer $P(A \cup B)$ et $P(A \cap B \cap C)$.
   Réponse attendue :
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
   et
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

6. Donner la notation et la définition de "la probabilité de A sachant B".
   Réponse attendue :
$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

7. Donner la formule permettant de calculer $P(A \cap B)$ et $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$.
Réponse attendue :

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

et

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)\ldots P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1}}(A_n)$$

8. Donne la formule des probabilités totales.
Réponse attendue :
Si $(A_1, A_2, \ldots A_n)$ est un système complet d'événements tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(A_i) \neq 0$.
Alors pour tout événement B, on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)$$

9. $(*)$ Donner les deux formules de Bayes.
Réponse attendue :

(a) Soit A et B deux évènements de probabilité non nulle, alors :

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$$

(b) Soit $A_1, \ldots, A_n$ un système complet d'événements et B un événement, alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$:

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P_{A_j}(B)}$$

10. Que signifie que deux évènements A et B sont indépendants ? Que signifie que n évènements $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants ?
Réponse attendue : Deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité P si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

n évènements sont mutuellement indépendants s'ils sont indépendants 2 à 2, 3 à 3, ..., n à n.

Exercices préparés

- Exercice de cours 9 du Chapitre 12.
- Exercice de cours 12 du Chapitre 12 : savoir refaire tous les calculs.
- Exemple 9 du Chapitre 12.