Chapitre 13

Intégration sur un segment

Table des matières

1 Définitions préliminaires : fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle

Définition 1. (Fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle)

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dit qu'une fonction f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I si :

- f est définie sur I,
- f est n-fois dérivable sur I,
- $f^(n)$ est continue sur I.

On note aussi $f \in \mathscr{C}^n(I)$.

Remarque. Être de classe $\mathscr{C}^0$ sur I signifie donc être continue sur I. On pourra donc noter $f \in \mathscr{C}^0(I)$ pour dire que f est continue sur I.

Définition 2. (Fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle)

On dit qu'une fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle I si :

- f est définie sur I,
- pour tout entier naturel n, f est n-fois dérivable sur I.

On note aussi $f \in \mathscr{C}^\infty(I)$.

Remarque. Une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle I est donc de classe $\mathscr{C}^n$ sur I pour tout entier naturel n.

Proposition 1. (Les fonctions de référence sont presque toutes de classe $\mathscr{C}^\infty$.) (admis)
Les fonctions de référence sont toutes de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur tout intervalle inclus dans leur domaine sauf :

- Les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha > 0$ non entier qui sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (en particulier la fonction racine carrée).
- La fonction valeur absolue (qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$)
- La fonction partie entière.

2 Définition de l'intégrale sur un segment

2.1 Primitives d'une fonction sur un intervalle

2.1.1 Définition

Définition 3. (Primitive d'une fonction sur un intervalle)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I une fonction :

- qui est dérivable sur I,
- et dont la dérivée sur I est f

Remarque. Il n'y a pas de notation spécifique pour les primitives car on va voir qu'il n'existe jamais une seule primitive d'une fonction.
L'usage est de noter, si possible F une primitive de f mais ce n'est pas une obligation

Exemple 1.

- Donner une primitive F de $f : x \mapsto 3x^2$
- Donner est une primitive h de $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

Proposition 2. (Condition suffisante d'existence de primitives) (admis)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

2.1.2 Ensemble des primitives d'une fonction

Proposition 3. (Ensemble des primitives d'une même fonction) (*Voir la preuve*)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et admettant une primitive F sur I.

- (☆) Pour tout réel c, la fonction $x \mapsto F(x) + c$ est encore une primitive de f sur I.
- (☆) Toute primitive de f sur I s'écrit sous la forme $x \mapsto F(x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

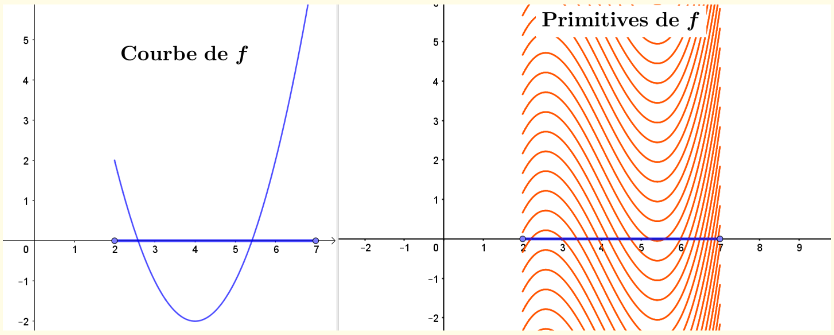
Autrement dit :
(☆☆☆) L'ensemble des primitives de f sur I est : $\Big\{x \mapsto F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\Big\}$.

Preuve de la proposition 3

Soit $c \in \mathbb{R}$. On note G la fonction définie sur I par :$\forall x \in I,\ G(x) = F(x) + c$.
Alors $\forall x \in I, G'(x) = F'(x) = f(x)$ donc G est bien une primitive de f sur I.

Réciproquement, soit G une primitive de f sur I. Alors $G - F$ est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ (G-F)'(x) = f(x) - f(x) = 0$, donc $G - F$ est une fonction constante. Donc il existe bien $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I,\ G(x) - F(x) = c$, c'est-à-dire tel que $\forall x \in I,\ G(x) = F(x) + c$.

Exemple 2. Voici à gauche la fonction $f : x \mapsto x^2 - 8x + 14$ et à droite, plusieurs des ses primitives. On remarquera que la primitive $F_0 : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - 4x^2 + 14x$ n'apparaît pas sur le graphique car sa courbe est bien au-dessus de la fenêtre graphique.



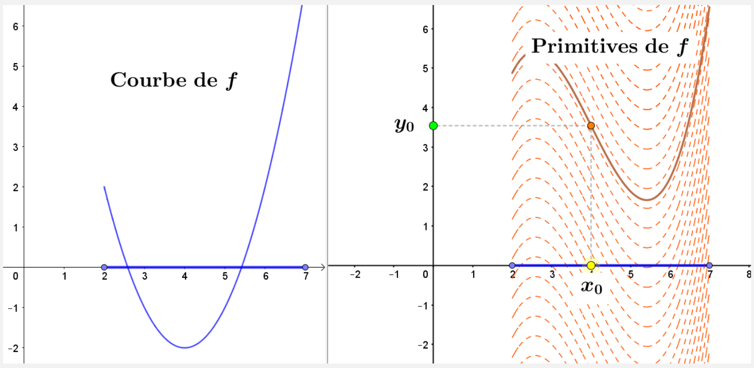
Proposition 4. (Primitive avec condition initiale)
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Preuve de la proposition 4

f étant continue sur I, elle admet une primitive F_0 d'après la proposition 1.
On note alors F la fonction définie sur I par $\forall x \in I,\ F(x) = F_0(x) - F(x_0) + y_0$.
D'après la proposition 2, F est bien une primitive de f sur I et on a bien $F(x_0) = y_0$.
De plus, si il existe une autre primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$. Alors, d'après la proposition 2 il existe un réel c tel que $G = F + c$.
On a alors $y_0 = G(x_0) = F(x_0) + c = y_0 + c$ donc $c = 0$ et donc $F = G$. Donc la fonction F est bien unique.

Remarque. Interprétation graphique :
On a représenté ci-dessous plusieurs primitives d'une même fonction. Parmi l'infinité de primitives, il en existe une et une seule dont la courbe passe par le point (x_0, y_0).



Exemple 3. Quelle est la primitive F sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 2x + 1$ qui s'annule en 1 ?

2.1.3 Primitives de référence

VOUS DEVEZ CONNAITRE PAR CŒUR LES DEUX TABLEAUX SUIVANTS :

2.1.3.1 Primitives des fonctions de références

<table>
<tr><th colspan="2">$f(x)$</th><th>$F(x)$</th><th>Domaine sur lequel f admet des primitives</th></tr>
<tr><td colspan="2">x^α
$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$</td><td>$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$</td><td>$\mathbb{R}_+^*$</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Exemples</td><td>1</td><td>$x + C$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>x</td><td>$\dfrac{x^2}{2} + C$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>x^2</td><td>$\dfrac{x^3}{3} + C$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>x^3</td><td>$\dfrac{x^4}{4} + C$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{x}$</td><td>$\dfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$</td><td>$\mathbb{R}_+^*$</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$</td><td>$2\sqrt{x} + C$</td><td>$\mathbb{R}_+^*$</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{1}{x^2}$</td><td>$-\dfrac{1}{x} + C$</td><td>$\mathbb{R}^*$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\dfrac{1}{x}$</td><td>$ln\,|x| + C$</td><td>$\mathbb{R}_+^*$ *ou* $\mathbb{R}_-^*$</td></tr>
<tr><td colspan="2">e^x</td><td>$e^x + C$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\cos x$</td><td>$sin\, x + C$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\sin x$</td><td>$-cos\, x + C$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\dfrac{1}{1+x^2}$</td><td>$arctan(x) + C$</td><td>$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">***OPTIONNEL :***</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\dfrac{1}{x^\alpha}$
$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$</td><td>$\dfrac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + C$</td><td>$\mathbb{R}_+^*$</td></tr>
</table>

2.1.3.2 Primitives des composées de références

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

<table>
<tr><th colspan="2">Si la fonction f est de la forme…</th><th>Alors une primitive F de f sur I est de la forme …</th></tr>
<tr><td colspan="2">$u'u^{\alpha}$
$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$</td><td>$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Exemples</td><td>$u'u$</td><td>$\dfrac{u^2}{2} + c$</td></tr>
<tr><td>$u'u^2$</td><td>$\dfrac{u^3}{3} + C$</td></tr>
<tr><td>$u'\sqrt{u}$</td><td>$\dfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$</td><td>$2\sqrt{u} + C$</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{u'}{u^2}$</td><td>$-\dfrac{1}{u} + C$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\dfrac{u'}{u}$</td><td>$ln\,|u| + C$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$u'e^u$</td><td>$e^u + C$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$u'\cos u$</td><td>$sin\,u + C$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$u'\sin u$</td><td>$-cos\,u + C$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\dfrac{u'}{1+u^2}$</td><td>$arctan(u) + C$</td></tr>
<tr><td colspan="3">OPTIONNEL :</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\dfrac{u'}{u^{\alpha}}$
$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$</td><td>$\dfrac{-1}{(\alpha-1)u^{\alpha-1}} + C$</td></tr>
</table>

Proposition 5. (Composée par une fonction affine) (admis)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et admettant une primitive F sur I et a et b deux réels, avec $a \neq 0$.

$$\text{La fonction } x \mapsto f(ax+b) \text{ a pour primitive } x \mapsto \frac{F(ax+b)}{a}.$$

Preuve de la proposition 5

Pour tout $x \in I$,

$$\left(\frac{F(ax+b)}{a}\right)' = \left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a}\left(F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a} \times aF'(ax+b) = f(ax+b).$$

2.1.4 Opérations sur les primitives

Proposition 6. (Opérations sur les primitives) (admis)
Soit F et G deux fonctions qui sont des primitives de respectivement f et g et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $F+G$ est une primitive de $f+g$
2. λF est une primitive de λf

Preuve de la proposition 6

1. $(F+G)' = F' + G' = f + g$
2. $(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f$.

Exemple 4. Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = 4x^2 + 3x^{10} + \frac{4}{x} - \frac{3}{x^4} - 3e^x + 3\cos x + \frac{2x+3}{x^2+3x+5} - \frac{4}{1+x^2}.$$

Attention ! Ne marche pas pour le produit ! ! FG n'est **pas** la primitive de fg ! !
Il n'y a pas de formule toute faite pour trouver la primitive d'un produit ou d'un quotient.
On verra plus loin l'intégration par partie qui sera très utile pour trouver des primitives d'un produit.

Exemple 5. Déterminer une primitive G de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (3x+1)(4x^2-5)$.

2.2 Définition de l'intégrale sur un segment

2.2.1 Cas des fonctions continues

2.2.1.1 Définition

Définition 4. (Intégrale de a à b d'une fonction continue.)
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Soit F une primitive de f sur I et $(a, b) \in \mathcal{I}^2$.
On ne suppose donc pas que $a < b$.

On appelle **intégrale de a à b de la fonction** f et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$ le nombre réel défini par :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = F(b) - F(a)}$$

Par convention, on note $\Big[\ F(t)\ \Big]_a^b = F(b) - F(a)$.

Remarque.

- Le résultat ne dépend pas de la primitive choisie donc la définition a bien un sens. En effet, si l'on remplace la primitive F par une primitive G, on sait qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + k$. Alors on a :

$$G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a).$$

- La lettre t est une variable muette. On l'appelle la *variable d'intégration*. On peut la remplace par n'importe quelle autre variable non utilisée ailleurs :

$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\, \mathrm{d}u.$$

  Mais $\displaystyle\int_a^x f(x)\, \mathrm{d}x$ n'a aucun sens !

- La définition est bien valable si $a \geq b$. Par exemple : $\displaystyle\int_2^1 x^2\, \mathrm{d}x$ existe bien.

2.2.1.2 Propriétés élémentaires

Proposition 7. (Propriétés élémentaires de l'intégrale)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue** sur un intervalle I.
Soit $(a,b) \in I^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $\boxed{\displaystyle\int_a^b 0 \, \mathrm{d}t = 0}$
2. $\boxed{\displaystyle\int_a^b \lambda f(t) \, \mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t}$
3. $\boxed{\displaystyle\int_a^a f(t) \, \mathrm{d}t = 0}$
4. $\boxed{\displaystyle\int_b^a f(t) \, \mathrm{d}t = -\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t}$

Preuve de la proposition 7

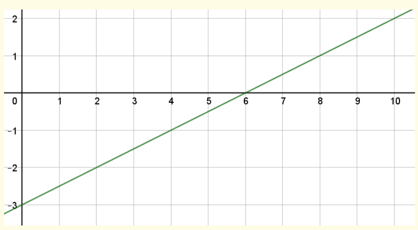
1. $\displaystyle\int_a^b 0 \, \mathrm{d}t = G(b) - G(a)$ où G est une primitive de la fonction nulle. On a donc $G' = 0$ donc G est constante et donc $G(b) - G(a) = 0$.
2. Soit F une primitive de f sur I. Alors λF est une primitive de λf (puisque $(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f$).
   Donc $\displaystyle\int_a^b \lambda f(t) \, \mathrm{d}t = [\lambda F]_a^b = \lambda F(b) - \lambda F(a) = \lambda (F(b) - F(a)) = \lambda \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t.$
3. Soit F une primitive de f sur I. Alors $\displaystyle\int_a^a f(t) \, \mathrm{d}t = F(a) - F(a) = 0.$
4. Soit F une primitive de f sur I. Alors $\displaystyle\int_b^a f(t) \, \mathrm{d}t = F(a) - F(b) = -\Big(F(b) - F(a)\Big) = -\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t.$

2.2.1.3 Interprétation graphique

Si $a < b$**,** alors $\displaystyle\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t$ représente l'aire **signée** (positive ou négative selon que C_f est en-dessus ou en-dessous de l'axe des abscisses) du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Exemple 6. On a représenté ci-dessous la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}x - 3$.

1. Calculer $\displaystyle\int_4^{10} f(x) \, \mathrm{d}x$.
2. Vérifier graphiquement.



2.2.1.4 Premiers calculs d'intégrales

Exemple 7. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_3^8 4 \text{ d}t = [\ 4t\ ]_3^8 = 4\times 8 - 4\times 3 = 4(8-3) = 20.$
2. $\displaystyle\int_0^1 2t^2+5t-1 \text{ d}t = \left[\ \frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 - t\ \right]_0^1 = \frac{13}{6}.$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t} \text{ d}t = [\ \ln|1+t|\ ]_0^1 = [\ \ln(1+t)\ ]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t} \text{ d}t = \int_0^1 \frac{t+1-1}{1+t} \text{ d}t = \int_0^1 1 - \frac{1}{1+t} \text{ d}t = [\ t - \ln|1+t|\ ]_0^1 = 1 + \ln 2.$
5. $\displaystyle\int_0^1 e^{2x} \text{ d}x = \left[\ \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\ e^{2x}\ \right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^2 - e^0\right) = \frac{1}{2}\left(e^2-1\right).$
6. $\displaystyle\int_0^1 te^{-t^2} \text{ d}t = \int_0^1 -2te^{-t^2} \text{ d}t = -\frac{1}{2}\left[\ e^{-t^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\left(e^{-1} - e^0\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right).$

2.2.1.5 Théorème fondamentale de l'analyse

Proposition 8. (Théorème fondamental de l'analyse) Soit f une fonction continue sur I et $c \in I$,

La fonction $H : \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_c^x f(t) \text{ d}t \end{array}\right.$ est la primitive de f qui s'annule en c.

Donc H et de classe $\mathscr{C}^1$ (voir définition plus loin) et on a $H' = f$.
On a donc, avec un abus de notation :

$$\boxed{\left(\int_c^x f(t) \text{ d}t\right)' = f(x)}$$

Preuve de la proposition 8

Soit F une primitive de f sur I (il en existe car f est continue sur I).
Par définition, pour tout $x \in I$, $H(x) = F(x) - F(c)$.
Donc H est bien dérivable puisque F l'est et on a :

$$\forall x \in I,\ H'(x) = F'(x) = f(x).$$

H est donc bien une primitive de f sur I. De plus $H(c) = \displaystyle\int_c^c f(t) \text{ d}t = 0.$

Proposition 9. (Corollaire du TFA)
Soit f une fonction continue sur I et $c \in I$ et $u, v : I \to J$ deux fonctions dérivable sur un intervalle J et à valeurs dans I.
Les fonctions $\left\{ \begin{array}{lll} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_c^{v(x)} f(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$, $\left\{ \begin{array}{lll} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{c} f(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$, $\left\{ \begin{array}{lll} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$ sont dérivables sur I et on a, avec un abus de notation :

$$\boxed{\left(\int_c^{v(x)} f(t)\ \mathrm{d}t\right)' = (F(v(x)) - F(c))' = v'(x)f(v(x))}$$

$$\boxed{\left(\int_{u(x)}^{c} f(t)\ \mathrm{d}t\right)' = (F(c) - F(u(x)))' = -u'(x)f(u(x))}$$

$$\boxed{\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ \mathrm{d}t\right)' = (F(v(x)) - F(u(x)))' = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))}$$

Exemple 8. EDHEC 2016 - Voie E
Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n sur $[n, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [n, +\infty[, f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t.$$

1. (a) Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ et déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n.

2.2.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$.

Définition 5. ((rappel) : fonction continue par morceaux)
On rappelle qu'une fonction est dite continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b$ telles que les restrictions de f à chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ admettent un prolongement continu sur $[a_i, a_{i+1}]$.

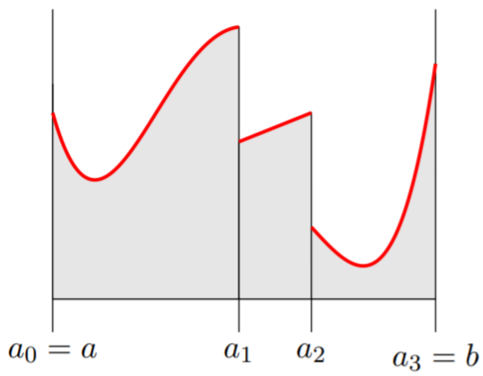
Définition 6. (Intégrale d'une fonction continue par morceaux)
Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$.
Il existe donc une subdivision $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b$ telle :

- *f est continue sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$.*
- *f admet une limite à gauche en a_i.*
- *f admet une limite à droite en a_{i+1}.*

On note alors $\tilde{f}_i$ le prolongement par continuité de f sur $[a_i, a_{i+1}]$. On appelle intégrale de a à b de f le nombre

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \tilde{f}_i(t)\ \mathrm{d}t$$

Représentation graphique :



Exemple 9. (*Voir la correction*)
Soit $x > 0$, calculez $\displaystyle\int_0^3 \lfloor t \rfloor\ \mathrm{d}t$.

3 Propriétés de l'intégrale

3.1 Relation de Chasles

Proposition 10. (Relation de Chasles)
Soit f une fonction continue sur I. Pour tout $(a,b,c) \in I^3$ (on n'a pas forcément $a \leq b \leq c$),

$$\boxed{\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t}$$

Preuve de la proposition 10

Soit F une primitive de f sur I.

$$\int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

3.2 Linéarité de l'intégrale

Proposition 11. (Linéarité de l'intégrale)
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle$I$, $(a,b) \in I^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)\ \mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t}$$

Preuve de la proposition 11

Soit F une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I.
Alors $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ (car$(\lambda F + \mu G)' = \lambda F' + \mu G' = \lambda f + \mu g$.)
Donc :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)\ \mathrm{d}t &= [\lambda F(t) + \mu F(t)]_a^b \\
&= \lambda F(b) + \mu F(b) - (\lambda F(a) + \mu F(a)) \\
&= \lambda(F(b) - F(a)) + \mu(F(b) - F(a)) \\
&= lambda \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Proposition 12. (Généralisation au cas de n fonctions)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions continues sur un intervalle I, $(a,b) \in I^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b \lambda_i f_i(t)\ \mathrm{d}t$$

3.3 Intégrale et inégalités

3.3.1 positivité de l'intégrale

Proposition 13. (Positivité de l'intégrale)
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soient $(a,b) \in I^2$ tels que $a < b$.

1. **Si** $\forall t \in]a,b[,\ f(t) \geq 0$, **alors** $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \geq 0$.
2. **Si** $\forall t \in]a,b[,\ f(t) > 0$, **alors** $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t > 0$.

Preuve de la proposition 13

Soit F une primitive de f sur I.

1. $\forall t \in]a,b[,\ F'(t) = f(t) \geq 0$ donc F est croissante sur $[a,b]$.
   Or $b > a$. Donc $F(b) \geq F(a)$ donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \geq 0$.
2. $\forall t \in]a,b[,\ F'(t) = f(t) > 0$ donc F est strictement croissante sur $[a,b]$.
   Or $b > a$. Donc $F(b) > F(a)$ donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t > 0$.

Remarque.

1. Si la fonction est positive ou strictement positive sur $[a,b]$ la proposition s'applique aussi.
2. On peut déduire de la proposition précédente, la proposition équivalente avec des fonctions négatives.

[][NRE]

3.3.2 fonction positive d'intégrale nulle

Proposition 14. (fonction positive d'intégrale nulle)
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Soient $(a,b) \in I^2$ tels que $a < b$.

Si $\begin{cases} \displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 0 \\ \text{et} \\ f \text{ est positive sur } [a,b] \\ (\forall t \in]a,b[,\ f(t) \geq 0) \end{cases}$, **alors** $\forall t \in [[]\, a,b],\ f(t) = 0$.

Preuve de la proposition 14

Soit F une primitive de f sur I. $\forall x \in]a,b[,\ F'(x) = f(x) \geq 0$ donc F est croissante sur $[a,b]$.
Or $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 0$. Donc $F(a) = F(b)$. Donc F est constante sur $[a,b]$.
Donc $\forall t \in [a,b],\ F'(t) = 0$.
C'est-à-dire $\forall t \in]a,b[,\ f(t) = 0$.

Remarque. On a le même résultat pour une fonction négative sur $]a,b[$.

Attention ! On prendra garde que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 0$ n'implique pas **en général** que f est nulle sur $[a,b]$.

3.3.3 Croissance de l'intégrale

Proposition 15. (Croissance de l'intégrale)
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I.

Soient $(a,b) \in I^2$ tels que $a < b$.

1. **Si** $\forall t \in]a,b[,\ f(t) \leq g(t)$, **alors** $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)$.

2. **Si** $\forall t \in]a,b[,\ f(t) < g(t)$, **alors** $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t < \int_a^b g(t)$.

Preuve de la proposition 15

On pose $h = g - f$ et on applique la positivité de l'intégrale avec la fonction h

Exemple 10.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$. Montrer que $J_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Exemple 11. EDHEC 2016 - Voie E (suite)

La partie en italique a été traitée à l'exemple 8.

Pour chaque entier naturel n , on définit la fonction f_n par : $\forall x \in [n, +\infty[$, $f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} dt$.

1. Étude de f_n.
   (a) *Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n.*
   (b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.
   (c) En déduire que pour chaque entier naturel n , il existe un unique réel, noté u_n , élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.
2. Étude de la suite (u_n).
   (a) Montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$.

3.3.4 Inégalité triangulaire

Proposition 16. (Inégalité triangulaire)
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soient $(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$.

$$\left| \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

Preuve de la proposition 16

Prouver $\left| \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t$ équivaut à prouver :

$$- \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t \leq \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Or pour tout réel x, on a :

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

Donc, pour pour tout $t \in [a,b]$, on a :

$$-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|.$$

De plus les fonctions f et $|f|$ sont continues sur $[a,b]$. On peut donc intégrer cette inégalité sur $[a,b]$ et on obtient :

$$\int_a^b -|f(t)| \ \mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t \leq \int_a^b |f(t)| \ \mathrm{d}t$$

4 Nouvelles méthodes de calcul d'intégrales

4.1 Intégration par partie.

Proposition 17. (Intégration par partie) (preuve faite en cours)
Soit u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et soit $(a,b) \in I^2$.

$$\int_a^b u(t)v'(t) \ \mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) \ \mathrm{d}t$$

Preuve de la proposition 17

Commençons par remarquer que $u'v$ et uv' sont continues comme produit de fonctions continues donc elles admettent une intégrale sur $[a,b]$.
On a $(uv)' = u'v + uv'$. Donc uv est une primitive de $u'v + uv'$.
Donc $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t) \ \mathrm{d}t \ \mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b$.
On obtient le résultat par linéarité et en faisant passer $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t) \ \mathrm{d}t$ à droite.

Remarque. Cette proposition est la conséquence directe de la dérivée d'un produit.

Exemple 12.

1. $\displaystyle\int_1^2 \ln x \ \mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_1^2 t^2 \ln t \ \mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_1^2 (\ln t)^2 \ \mathrm{d}t$.
4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{t \ln t}{(1+t^2)^2} \ \mathrm{d}t$.
5. $\displaystyle\int_0^1 t^3 e^{-t} \ \mathrm{d}t$.

Exemple 13. Déteriner une primitive de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4.2 Changement de variable

Proposition 18. (Changement de variable)
Soit à calculer une intégrale de la forme :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t$$

où f et φ sont deux fonctions telles que $f \circ \varphi$ est continue sur $[a, b]$ et f est continue sur $\varphi([\alpha, \beta])$.

Si φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\Big(\varphi(t)\Big)\varphi'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\ \mathrm{d}u$$

On dit qu'on a effectué le **changement de variable** $u = \varphi(t)$

Preuve de la proposition 18

Soit F une primitive de f et on pose $G = F \circ \varphi$.
On remarque que $G'(t) = \varphi'(t)F'(\varphi(t)) = \varphi'(t)f(\varphi(t))$.
Donc G est une primitive de $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$.
D'où

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t &= G(\beta) - G(\alpha)\\ &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))\\ &= \int_{\varphi(\alpha}^{\varphi(\beta)} f(t)\ \mathrm{d}u\end{aligned}$$

(*retour à la proposition 18*)

Exemple 14.

1. Calcul de $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{e^t + 1}$ en posant $u = e^t$.
2. Calcul de $K = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t + 2\sqrt{t}}$ en posant $u = \sqrt{t}$.
3. Calcul de $L = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + e^t}}\ \mathrm{d}t$ en posant $u = \sqrt{1 + e^t}$.

Corollaire 19. (Intégrale d'une fonction paire ou impaire) (preuve faite en cours)
Soit f une fonction définie et continue sur $[-a, a]$.

1. Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\ \mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t$.
2. Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\ \mathrm{d}t = 0$.

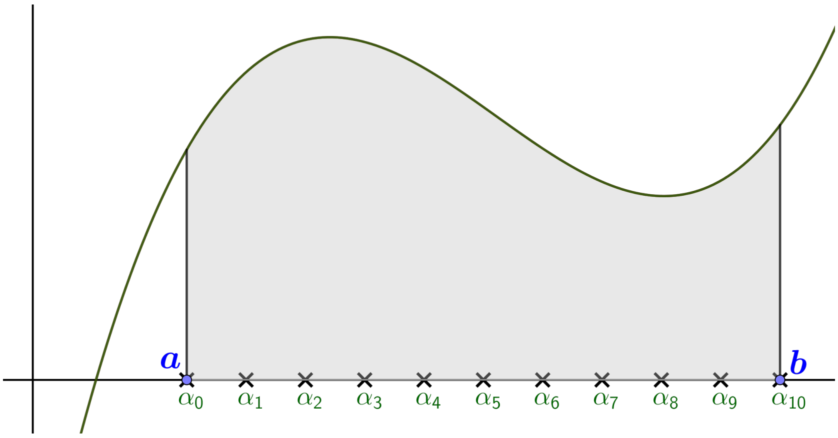
5 Sommes de Riemann

5.1 Approximation d'une intégrale par la méthode des rectangles.

5.1.1 Introduction

On considère une fonction f définie sur $[a, b]$. On pose $I = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$. On chercher à calculer par des calculs élémentaires (sans primitive) une valeur approchée de I. On peut utiliser pour cela la méthode des rectangles (Lien vers l'animation Geogebra) :

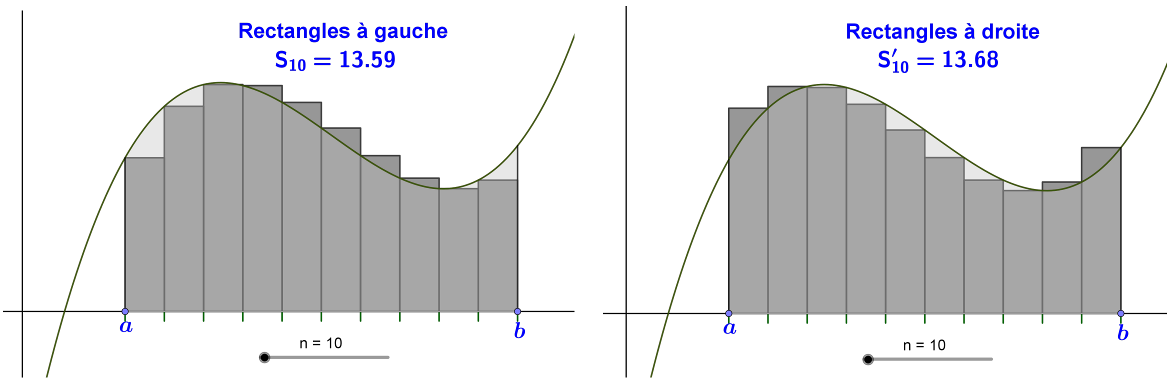
- On fixe un entier $n > 0$ et on divise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même largeur. On définit ainsi une subdivision $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de $[a, b]$:



On a alors, pour tout $k \in [\![0\ ;\ n]\!]$:

$$\boxed{\alpha_k = \quad a + k\frac{b-a}{n}}$$

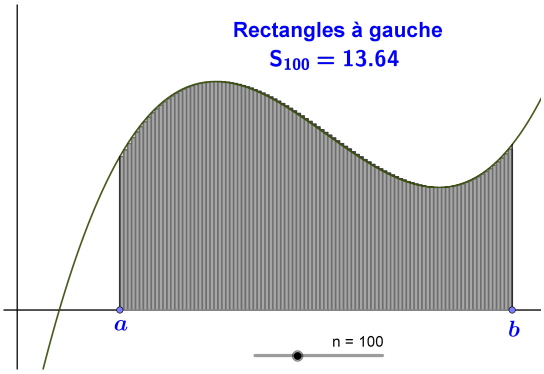
- On définit les rectangles à gauche (resp. à droite) comme suit. On note S_n (resp. S'_n) la somme des aires de ces rectangles.

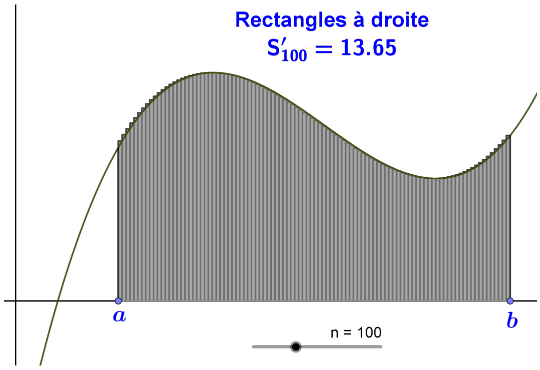


- On peut alors démontrer que :

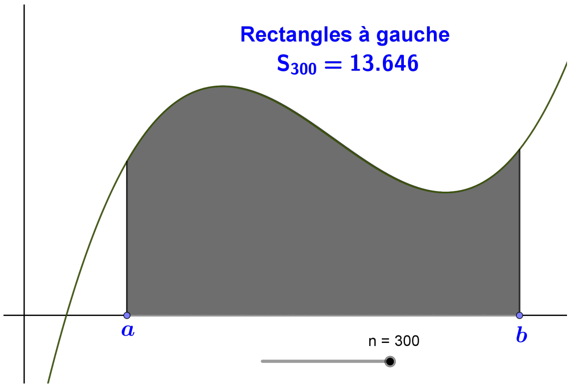
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S'_n = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

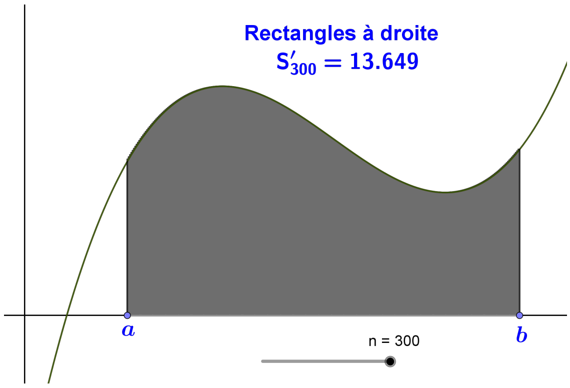
Par exemple, avec $n = 100$:



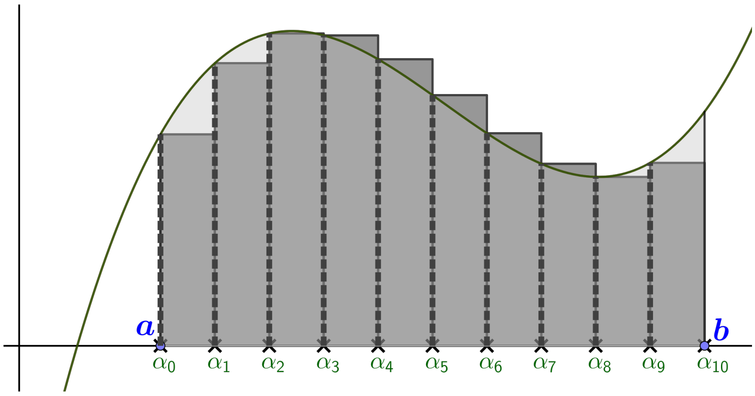


Avec $n = 300$:





5.1.2 Formalisation de la méthode des rectangles à gauche

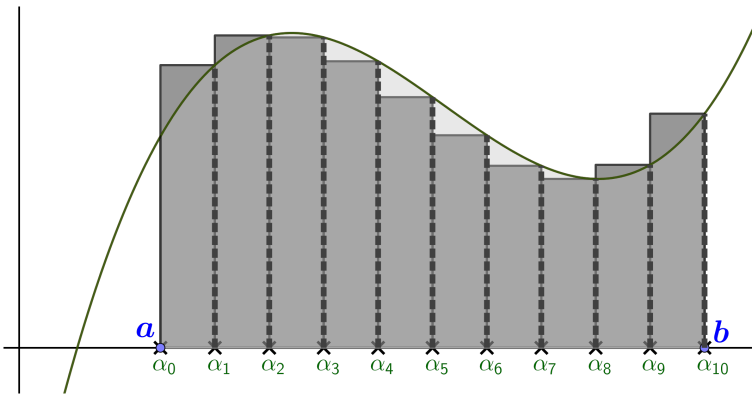


- Dans la méthode des rectangles à gauche avec n rectangles, chaque rectangle a pour largeur $\boxed{\dfrac{b-a}{n}}$.
- Les rectangles ont pour hauteur $f(\alpha_k)$ pour k allant de 0 à $n-1$.

L'aire totale des n rectangles à gauche vaut donc :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(\alpha_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)}$$

5.1.3 Formalisation de la méthode des rectangles à droite



- Dans la méthode des rectangles à droite avec n rectangles, chaque rectangle a pour largeur $\boxed{\dfrac{b-a}{n}}$.
- Les rectangles ont pour hauteur $f(\alpha_k)$ pour k allant de 1 à n.

L'aire totale des n rectangles à droite vaut donc :

$$\boxed{S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(\alpha_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)}$$

5.2 Sommes de Riemann

Définition 7. (Sommes de Riemann)
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et $n \geq 1$, on appelle sommes de Riemann de f sur $[a,b]$ les expressions :

$$\boxed{S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{S'_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)}$$

Remarque. On reconnaît dans ces sommes les aires des rectangles à gauche et à droite.

Remarque. **Cas particulier important : $a=0$ et $b=1$.** Dans ce cas, les sommes de Riemann s'écrivent :

$$\boxed{S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{S'_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

Proposition 20. (Convergence et limite des sommes de Riemann)
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.

$$\boxed{\text{Les suites } (S_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (S'_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ convergent vers la même limite } \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.}$$

Remarque. En particulier, si $a=0$ et $b=1$ alors

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t}$$

Preuve de la proposition 20

On va faire la preuve dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
f' est continue sur $[a,b]$ donc $|f'|$ aussi et donc elle est bornée sur $[a,b]$ et il existe $M = \max\limits_{[a,b]}|f'|$.
D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall x,y \in [a,b], |f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$$

Pour $k \in [\![0,n-1]\!]$, on pose $\alpha_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ et donc $S_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{b-a}{n}f(\alpha_k)$.

On a d'une part

$$\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(\alpha_k)\ \mathrm{d}t = f(\alpha_k)\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} 1\ \mathrm{d}t = f(\alpha_k)\times fracb-an$$

et d'autre part, d'après la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t$$

En regroupant, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - S_n(f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(\alpha_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} f(\alpha_k) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(\alpha_k)\ \mathrm{d}t \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} (f(t) - f(\alpha_k))\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On applique deux fois l'inégalité triangulaire puis l'IAF :

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - S_n(f) \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(t) - f(x_k)\ \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} |f(t) - f(\alpha_k)|\ \mathrm{d}t \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} M|t - \alpha_k|\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or,

$$\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} |t-\alpha_k|\ \mathrm{d}t = \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} t - \alpha_k\ \mathrm{d}t = \left[\frac{(t-\alpha_k)^2}{2} \right]_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} = \frac{(b-a)^2}{2n^2}$$

Et donc

$$\left| \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - S_n(f) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^2}{2n^2} = M \frac{(b-a)^2}{2n}$$

Comme le terme de droite tend vers 0, on a le résultat souhaité.

5.3 Application à la convergence de certaines suites : exemples

Exemple 15.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n^4} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^3$. Déterminer la limite de (u_n).

Exemple 16.

Même question avec la suite définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$.