Feuille d'exercices n°13 - Intégration sur un segment

1 CALCULS DIRECTS DE PRIMITIVES ET D'INTEGRALES

Exercice 1 - Des primitives élémentaires (A Savoir Refaire Absolument)
Déterminer une primitive des fonctions suivantes. On notera systématiquement F cette primitive.

1. $f : x \mapsto 3x^4 - 5x + 2 + \frac{4}{x} - 3e^x - 4\cos x$
2. $f : x \mapsto (4x+3)(x-1)$
3. $f : x \mapsto (2x^2-3)^2$
4. $f : x \mapsto \frac{1}{x^3}$
5. $f : x \mapsto \frac{3}{x^5}$
6. $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$

Exercice 2 - Des primitives « application directe du cours » (A Savoir Refaire Absolument)
Déterminer une primitive des fonctions suivantes. On notera systématiquement F cette primitive.

1. $f : x \mapsto e^{3x+1}$
2. $f : x \mapsto xe^{x^2}$
3. $f : x \mapsto \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$
4. $f : x \mapsto \frac{x}{(x^2+1)^2}$
5. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$
6. $f : x \mapsto \tan x$
7. $f : x \mapsto \sin x \cos x$
8. $f : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^3 x}$
9. $f : x \mapsto \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$
10. $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$
11. $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$
12. $f : x \mapsto \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$
13. $f : x \mapsto \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$

Exercice 3 - Primitive avec Linéarisation (A Savoir Refaire)
Déterminer une primitive F de $f : x \mapsto \sin^2 x \cos^2 x$

Exercice 4 – Des intégrales d'application directe du cours (ASRA)
Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_1^2 \frac{dt}{t^2}$
2. $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$
3. $\int_e^{e^2} \frac{1}{t\ln(t)}dt$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)}dt$
5. $\int_1^2 \frac{x}{x+2}dx$
6. $\int_0^1 \frac{t}{t^2+1}dt$
7. $\int_1^2 \frac{x^2}{x^2+1}dx$
8. $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+2)}$

Exercice 5 - Des intégrales plus ou moins faciles (ASR)
Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^1 \frac{t^2+2t-1}{t+1}dt$
2. $\int_0^1 x(x^2+1)^5 dx$
3. $\int_{-1}^4 \frac{dt}{(2t+5)^3}$
4. $\int_{-4}^0 x\sqrt{x+4}dx$
5. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}}dx$
6. $\int_2^4 \frac{dx}{x^2-1}$
7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos^3(t)}dt$
8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5(t)dt$

Exercice 6- Des intégrales à « découper » (ASR)

1.

Calculer l'intégrale $\int_{-1}^2 (|x-1| - |3x+2|)\,dx$.

2.

Calculer l'intégrale $\int_2^5 \lfloor x \rfloor dx$.

Exercice 7 Quelques intégrales d'application directe en plus (ASRA)
Justifier l'existence des intégrales suivantes, puis les calculer.

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t \qquad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)} \qquad I_3 = \int_0^1 \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

2 INTEGRATION PAR PARTIE

Exercice 8 - IPP – (ASRA)

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 t\cos(t)\ \mathrm{d}t$; 2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2(t)}\ \mathrm{d}t$; 3. $\displaystyle\int_0^x \mathrm{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t$ 4. $\displaystyle\int_1^x t^2\ln(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 9 - Double IPP – (ASRA)

1. $\displaystyle\int_0^1 t^2\cos(t)\,\mathrm{d}t$; 2. $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{2t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$; 3. $\displaystyle\int_0^x (t^2-3t)\,\mathrm{e}^{4t}\ \mathrm{d}t$

Exercice 10 IPP ou double IPP – (ASR)

1. $\int_0^1 \ln(1+t^2)dt$
2. $\int_1^e t^n \ln t\ dt$
3. $\int_0^1 3x^2e^{-x}$
4. $\int_1^3 x\ln x\,dx$
5. $\int_1^3 x\ln x\,dx$
6. $\int_0^\pi e^x\cos(2x)\,dx$
7. $\int_0^\pi (x^2+1)\sin x\,dx$

3 CHANGEMENT DE VARIABLE

Exercice 11 (ASR)

Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variable indiqué.

1. $\int_1^e \frac{dt}{t+t(\ln(t))^2}$ avec $u=\ln(t)$
2. $\int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln(t)+1}}$ avec $u=\ln(t)$.
3. $\int_0^1 \frac{dt}{e^t+1}$ avec $u=e^t$
4. $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$ avec $t=\sin(u)$
5. $\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}dt$ avec $t=\sin(u)$
6. $\int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}dt$ avec $u=\sqrt{t}$

Exercice 12 - Un classique !

1. A l'aide du changement de variable $u=\frac{\pi}{2}-t$, démontrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin(t)+\cos(t)}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sin(t)+\cos(t)}dt = \frac{\pi}{4}.$$

2. En déduire la valeur de l'intégrale suivante (on pourra effectuer le changement de variable $t=\sin x$).

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}+t}$$

4 DES SUITES ET DES FONCTIONS DEFINIES PAR DES INTEGRALES

Exercice 13 - (****) – pour approfondir.

Pour tout entier $n\geq 0$ et tout réel $x\geq 0$ on pose

$$I_n(x) = \int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt \text{ et } J_n(x) = \int_0^1 s^x(1-s)^n ds.$$

1. Trouver, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, une relation entre $I_n(x)$ et $J_n(x)$.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, trouver une relation entre $J_n(x)$ et $J_{n-1}(x+1)$.
3. En déduire $J_n(x)$ et $I_n(x)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+$.

***Indication :** pour la première question, on cherchera un changement de variable qui fait passer de $I_n(x)$ à $J_n(x)$.*

Exercice 14

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,dx \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx.$$

1. Montrer que (I_n) est décroissante. Puis encadrer I_n pour montrer que (I_n) tend vers 0.
Indication : on pourra encadrer $\ln(1+x^2)$.

2. Montrer de même que (J_n) est décroissante et tend vers 0.

3. A l'aide d'une intégration par partie, trouver pour tout $n \in \mathbb{N}$ une relation entre I_n et J_{n+2}.

Exercice 15 – pour s'entrainer en autonomie

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_1^e (\ln(t))^n dt$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.
2. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre u_n et u_{n-1}.
3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$ puis donner la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 16

1. On considère la fonction f définie sur $]1,3[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+3}$. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :
$$\forall x \in]1,3[,\ f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3}.$$
En déduire $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. On considère la fonction g définie sur $]-\infty,1[$ par $g(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-4x+3}$. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :
$$\forall x \in]-\infty,1[,\ g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3}.$$
En déduire $\displaystyle\int_{-3}^{-2} g(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Factoriser, pour $x \in \mathbb{R}$, $4x^2-4x+1$. En déduire $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{4x^2-4x+1}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{4x^2-4x+1}\,\mathrm{d}x$.

4. Déterminer $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t$, en commençant par factoriser le dénominateur par 4.

5. Déterminer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$, en commençant par mettre sous forme canonique le trinôme x^2+4x+5 (*ie.* sous la forme $a(x-\alpha)^2+\beta$).

Exercice 17

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{2n}{2n+3} I_{n-1}$.
3. Calculer alors I_1 et I_2.

Exercice 18

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation de récurrence pour la suite (I_n).
3. Calculer alors I_2 et I_3.

Exercice 19

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^2 \frac{t^n}{1+t^n}dt$$

1. Encadrer $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt$ puis montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt = 0$$

2. Démontrer que pour tout $t \in [1,2]$, $1 - \frac{1}{t^n} \leq \frac{t^n}{1+t^n} \leq 1$. En déduire la limite de $\int_1^2 \frac{t^n}{1+t^n}dt$ quand $n \to +\infty$.

3. Conclure quant à la limite de (I_n)

Exercice 20

1. Montrer que la fonction $G : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer sa fonction dérivée.
2. Déterminer la limite de G en 0.

Exercice 21

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0) = 0$. On définit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $F(0) = 0$ et pour tout $x > 0$,

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que F est continue en 0.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 22 – Calculer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}$;

2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$;

Exercice 23 – Exercice supplémentaire d'entrainement

Calculer, à l'aide d'un changement de variable, les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\left(1+\frac{1}{t}\right)^4 \mathrm{d}t$ $(x > 0)$ en posant $u = \frac{1}{t}$;
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{3/2}}$, en posant $t = \tan(u)$;
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$, en posant $y = \mathrm{e}^x$;
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x$, en posant $t = \cos(x)$;
5. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)\sin^2(t)}$, en posant $u = \tan(t)$;
6. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x$, en posant $u = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$.

Exercice 24

On pose, pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_n = \int_0^1 t^n e^{1-t} dt$$

1. Calculer I_0.
2. Démontrer que (u_n) est décroissante.
3. Démontrer que pour tout $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = -1 + (n+1)u_n$$

4. Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $\;0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$. En déduire la limite de (u_n).
5. On dit que deux suite (u_n) et (v_n) sont dites *équivalentes* si $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. On note alors $u_n \sim v_n$.
   Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$.
   ,

Exercice 25

On considère les suite (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx \quad ; \quad J_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} dx$$

1. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
2.
   a. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$0 < J_n \leq I_n \leq \frac{1}{n}$$

   b. En déduire que (I_n) et (J_n) convergent et donner leur limite.

3. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$

$$I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{e^{-n}}{2} - J_n\right)$$

4. On dit que deux suite (u_n) et (v_n) sont dites *équivalentes* si $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. On note alors $u_n \sim v_n$.
   Montrer que $I_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 26 (Exercice 12 revisité)

Le but est de retrouver les valeurs obtenues à l'exercice 12. On ne pourra donc pas utiliser les résultats de l'exercice 12 ici.

On pose

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\, dx \quad ; \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\, dx$$

1. Calculer $I + J$ et $I - J$.
2. En déduire la valeur de I et J.

5 POUR APPROFONDIR

Exercice 27 – Oral ESCP (** à partir de la question 3)**

On note E l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs réelles positives.
Pour tout $f \in E$, on définit la fonction $\varphi(f)$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ \varphi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)}\ \mathrm{d}t.$$

On note f_0 la fonction constante égale à 1, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_{n+1} = \varphi(f_n)$.

2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de la forme $x \mapsto \alpha_n x^{\beta_n}$, avec α_n et β_n réels.

b) Donner des relations de récurrence vérifiées par les suites $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\beta_n = 2 - 2^{1-n}$.

3.a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comparer $\dfrac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}}$ et $\sqrt{\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}}$.

b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $M_n = \max\limits_{x\in[0,1]} \left| f_n(x) - \dfrac{1}{4}x^2 \right|$, puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = 0$.

6 EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

Exercice 28

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$$

1. Montrer que f est impaire.

2.

- **a.** Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et déterminer $f'(x)$.
- **b.** Donner le tableau de variations de f.

3.

- **a.** En utilisant la relation $t^2 \leq 1 + t^2 \leq 1 + 2t + t^2$, valable pour tout réel t positif, montrer que :

$$\forall x \geq 0, \qquad \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq f(x) \leq \ln 2$$

- **b.** En déduire la limite de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 29 - Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}$

On pose, pour tout entier n :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

1. Calculer, pour tout entier $k \geq 0$:

$$\int_0^1 (-t)^k dt$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \ln 2 - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt$$

3. Montrer que :

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt \right| \leq \frac{1}{n+2}$$

4. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln 2$

Exercice 30

Si a et b sont deux réels, $\max(a,b)$ et $\min(a,b)$ désignent respectivement le maximum et le minimum de a et b.

1. Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^2 \max\left(x, \frac{1}{2}\right) dx$$
$$J = \int_0^1 \min(x, 1-x)\, dx$$

2. Tracer l'allure des fonctions f et g définies par $f(x) = \max\left(x, \frac{1}{2}\right)$ et $g(x) = \min(x, 1-x)$. Puis vérifier graphiquement les valeurs de intégrales I et J.

3. Exprimer $\max(a,b)$ et $\min(a,b)$ à l'aide de $|a-b|$.

Exercice 31

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{\sin x} - e^{-\sin x}}{\ln(2+\tan^2 x)} dx \quad ; \quad I_2 = \int_{-1}^{1} e^{-|x|} dx \quad ; \quad I_3 = \int_{-3}^{4} \frac{|x-1|}{|x|+1} dx \quad ; \quad I_4 = \int_{4/e}^{2e} \frac{\lfloor y \rfloor}{y}\, dy$$