Programme de colle n° 14
Semaine du 25/01/2021
Probabilités sur un univers fini et intégration

Pas d'exercice préparé cette semaine. La colle commencera par une question de cours parmi les 4 ci-dessous puis un ou deux calcul d'intégrale et un exercice de probabilité.
Sur les intégrales, vous devez maîtriser :

- Le calcul direct d'une intégrale à l'aide des intégrales de référence
- L'intégration par partie
- Le changement de variable.

Questions de Cours

1. Soit A un évènement et $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ un s.c.e.
   On suppose qu'on connaît les probabilités $P(E1), P(E_2), \dots, P(E_n)$ et les probabilités $P_{E_1}(A)$, $P_{E_2}(A), \dots, P_{E_n}(A)$.
   (a) Que signifie l'acronyme "s.c.e" ?
   (b) Comment peut-on calculer $P(A)$? On détaillera tout le raisonnement. On traitera dans l'ordre les cas suivants :
      i. Le s.c.e. possède 2 évènements : (E_1, E_2).
      ii. Le s.c.e. possède 3 évènements : (E_1, E_2, E_3).
      iii. Le s.c.e. possède n évènements : $(E_1, E_2, \dots, E_n)$.

   Réponse attendue :

   (a) "s.c.e" signifie "système complet d'évènements".
   (b) i. On décompose l'évènement A à l'aide du s.c.e. :
      "A se réalise soit en même temps que E_1, soit en même temps que E_2 ". Ce qui s'écrit :
      $$A = (E_1 \cap A) \cup (E_2 \cap A).$$
      $(E_1 \cap A)$ et $(E_2 \cap A)$ sont incompatibles car E_1 et E_2 le sont. Donc :
      $$\begin{aligned} P(A) &= P(E_1 \cap A) + P(E_2 \cap A) \\ &= P(E_1)P_{E_1}(A) + P(E_2)P_{E_2}(A) \end{aligned}$$
      ii. Dans le cas où le s.c.e. est constitué de trois évènements, c'est le même raisonnement :
      "A se réalise soit en même temps que E_1, soit en même temps que E_2, soit en même temps que E_3". Ce qui s'écrit :
      $$A = (E_1 \cap A) \cup (E_2 \cap A) \cup (E_3 \cap A).$$
      $(E_1 \cap A)$, $(E_2 \cap A)$ et $(E_3 \cap A)$ sont incompatibles car E_1, E_2 et E_3 le sont. Donc :
      $$\begin{aligned} P(A) &= P(E_1 \cap A) + P(E_2 \cap A) + P(E_3 \cap A) \\ &= P(E_1)P_{E_1}(A) + P(E_2)P_{E_2}(A) + P(E_3)P_{E_2}(A) \end{aligned}$$
      iii. Dans le cas où le s.c.e. est constitué de n évènements, c'est encore le même raisonnement :
      "A se réalise soit en même temps que E_1, soit en même temps que E_2, ..., soit en même temps que E_n". Ce qui s'écrit :
      $$A = (E_1 \cap A) \cup \cdots \cup (E_n \cap A).$$
      $(E_1 \cap A), \cdots, (E_n \cap A)$ sont incompatibles car $E_1, \dots, E_3$ le sont. Donc :
      $$\begin{aligned} P(A) &= P(E_1 \cap A) + \cdots + P(E_n \cap A) \\ &= P(E_1)P_{E_1}(A) + \cdots + P(E_n)P_{E_2}(A) \end{aligned}$$

2. (a) Donner les formules permettant de calculer $P(A \cup B)$ et $P(A \cup B \cup C)$.
   Réponse attendue :
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
   et
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

   (b) Donner la notation et la définition de "la probabilité de A sachant B".
   Réponse attendue :
$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

   (c) Donner la formule permettant de calculer $P(A \cap B)$, $P(A \cap B \cap C)$ puis plus généralement, $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$.
   Réponse attendue :
$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P_A(B)P_{A \cap B}(C)$$
   et
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) \ldots P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1}}(A_n)$$

3. (a) Soit A et B deux évènements de probabilité non nulle. Exprimer $P_B(A)$ à l'aide de $P(A)$, $P_A(B)$ et $P_{\overline{A}}(B)$.
   Réponse attendue :
$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P_A(B)}{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)} = \frac{P(A)P_A(B)}{P(A)P_A(B) + (1 - P(A))P_{\overline{A}}(B)}$$

   (b) Soit $A_1, \ldots, A_n$ un système complet d'événements et B un événement. Exprimer, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P_B(A_i)$ en fonction de $P(A_i)$ et $P_{A_j}(B)$, pour $j \in [\![1, n]\!]$.
   Réponse attendue :
$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i \cap B)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j \cap B)}$$

4. Que signifie que deux évènements A et B sont indépendants ? Que 3 évènements A, B et C sont mutuellement indépendants ? Que signifie que n évènements A_1, $A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants ?
   Réponse attendue :

   - Deux évènements A et B sont indépendants pour la probabilité P si
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$
   - Trois évènements A, B et C sont indépendants pour la probabilité P si :
     - Ils sont indépendants 2 à 2, c'est-à-dire que :
       * $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
       * $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$
       * $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$
     - Et ils sont indépendants 3 à 3, c'est-à-dire que :
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$
   - n évènements sont mutuellement indépendants s'ils sont indépendants 2 à 2 et 3 à 3, ..., et n à n.