DM n° 8 - Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \, \mathrm{d}t$.

1. (a) Calculer W_0 et W_1.
   (b) Montrer que la suite (W_n) est décroissante.
   (c) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$.
   (d) A l'aide du changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$, établir que pour tout entier $n \geq 0$, $W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n \, \mathrm{d}t$.

2. (a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$.
   (d) En déduire la valeur de W_{2n+1}.

3. **Un équivalent de W_n.**
   On dit que deux suite (u_n) et (v_n) sont *équivalentes* si $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. On note alors $u_n \sim v_n$.
   (a) Justifier que $n + 1 \sim n$.
   (b) Calculer $\lim_{n \to +\infty} \frac{W_{n+2}}{W_n}$.
   (c) En déduire, par encadrement, que $W_{n+1} \sim W_n$.
   (d) Justifier que si $u_n \sim v_n$ et que (w_n) est une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \neq 0$ alors :
   - $u_n w_n \sim v_n w_n$.
   - $\frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{w_n}$
   - $\frac{w_n}{u_n} \sim \frac{w_n}{v_n}$

   (e) Montrer également que si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$.
   (f) En déduire, à l'aide la question 2.c, que $(W_n)^2 \sim \frac{\pi}{2n}$
   (g) Montrer que si (u_n) et (v_n) sont des suites positives et que $u_n \sim v_n$, alors $\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$.
   (h) En déduire que :
   $$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

4. Utiliser la question 2c) pour compléter le script `Scilab` ci-dessous afin qu'il définisse une fonction "suiteU" qui renvoie la valeur de W_n en fonction de n.

```
function




endfunction
```