Chapitre 14

Variables Aléatoires Réelles Finies

Table des matières

1 Variables aléatoires réelles finies

Dans ce chapitre, Ω **est un ensemble fini** et on munit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ d'une probabilité P et donc $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé.

Définition 1. (Variable Aléatoires Finie)
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.
Ω *est donc un ensemble fini.* On dit que X est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ so f est une application de Ω dans $\mathbb{R}$:

$$X : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{array} \right. .$$

$X(\Omega)$ est donc l'ensemble des valeurs prises par X. On dit que $X(\Omega)$ est le support de X.
Comme ici Ω est fini, $X(\Omega)$ est fini et **on dit que X est une variable aléatoire réelle finie**.

Exemple 1.

Situation 1 : On considère l'expérience aléatoire consistant à jeter deux dés à 6 faces.

- $\Omega =$ ....
- On considère la variable aléatoire X égale à la somme des deux résultats obtenus :

$$X : \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (i,j) & \longmapsto & i+j \end{array} \right. .$$

  On a ici $X(\Omega) =$ ....
- On pose $A = \Big\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq 4\Big\}$. A est un évènement.
  - $A =$ ....
  - A se notera plus simplement $\{X \leq 4\}$ ou $[X \leq 4]$ ou $\Big(X \leq 4\Big)$
- On pose $B = \Big\{\omega \in \Omega | X(\omega) > 10\Big\}$. B est aussi un évènement.
  - $B =$ ....
  - On notera $B =$ ....
  - On a $\overline{B} =$ .... $=$ ....

Situation 2 : On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer 4 fois une pièce successivement.

- $\Omega =$ ....
- On considère la variable aléatoire Y égale au nombre de P obtenus.
  $Y(\Omega) =$ ....
  - $(Y = 3) =$ ....
  - $(Y \geq 3) =$ ....
  - $(1 \leq Y \leq 3) =$ ....

Définition 2. (Notation)
Voici comment on notera les différents événements liés à la variable aléatoire X : pour $x \in \mathbb{R}$ et A une partie de $\mathbb{R}$,

- $\{X = x\}$ désigne $\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$
- $\{X \in A\}$ désigne $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}$
- $\{X \leq x\}$ désigne $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\}$
- $\{X \geq x\}$ désigne $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \geq x\}$
- $P(\{X = x\})$ se note plus simplement $P(X = x)$, $P(\{X \in A\})$ se note plus simplement $P(X \in A)$, etc.

On pourra retenir de cette définition que $\{X = k\}$, $\{X \leq k\}$, etc sont des évènements.

Attention ! Autant il n'est pas toujours facile et utile de définir Ω, autant il est indispensable de préciser $X(\Omega)$ dès qu'une variable aléatoire X est introduite.

Proposition 1. (s.c.e. associé à une variable aléatoire réelle finie)
Soit X une variable aléatoire réelle finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, la famille d'événements $(X = k)_{k \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. On l'appelle « Système Complet d'Evènements associé à X ».

Preuve de la proposition 1

Il est clair que le évènements de la famille $(X = k)_{k \in X(\Omega)}$ sont deux à deux disjoints : X ne peut pas prendre deux valeurs distincts simultanément.
De plus, pour tout issue $\omega \in \Omega$, si on pose $k = X(\omega)$, l'évènement $(X = k)$ contient alors ω. Toute issue appartient donc à l'un des $(X = k)$: la famille $(X = k)_{k \in X(\Omega)}$ recouvre bien Ω.

Exemple 2. Dans la situation 2, le s.c.e. associé à la variable aléatoire Y est

....

Attention ! Ne pas confondre événement et variable aléatoire.
Par exemple, dans la situation 2 :

- Y est une variable aléatoire qui désigne le nombre de Piles obtenus. **Donc $P(Y)$ n'a aucun sens !**.
- $(Y = 3)$ est un événement : "obtenir 3 fois Pile". **Donc $P(Y = 3)$ a un sens !**

2 Loi d'une variable aléatoire réelle finie

2.1 Loi d'une variable aléatoire réelle finie

Définition 3. (Loi d'une variable aléatoire réelle finie)
Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
On appelle loi de probabilité de X l'ensemble des couples $\Big(k, P(X = k)\Big)$ où $k \in X(\Omega)$.

Exemple 3. Une urne contient 5 boules dont 2 rouges. Les autres boules sont blanches. On effectue 4 tirages **successifs et avec remise** et on note :

- X le rang de la première boule rouge. X prend de plus la valeur 0 si on ne tire pas de boule rouge.
- Y le nombre de boules rouges obtenues.

On notera R_i (resp. B_i) l'évènement "obtenir une boule rouge (resp. blanche) au i-ième tirage".

1. Déterminer la loi de X et de Y.
2. Vérifier qu'on a bien $\displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} P(X) = k = \sum_{k \in Y(\Omega)} P(Y) = k = 1.$

Attention ! Deux variables X et Y peuvent avoir la même loi sans être égales ! La loi décrit un "comportement" global.
Exemple : on lance deux dés parfaitement identiques et on note X le résultat du premier dé et Y le résultat du deuxième dé. X et Y suivent la même loi mais sont bien deux variables aléatoires distinctes (même si, elles peuvent prendre la même valeur).

2.2 Fonction d'une variable aléatoire réelle finie.

Proposition 2. (image d'une variable aléatoire réelle finie par une fonction)
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et g une fonction définie sur $X(\Omega)$. Alors $Y = g(X)$ est une variable aléatoire définie sur définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et

1. $Y(\Omega) =$ ....
2. $\forall y \in Y(\Omega),\ P(Y = y) =$ ....

Exemple 4.
Soit X le résultat d'un lancer de dé tétraédrique équilibré. On pose $Y = 2X - 3$ et $Z = (X - 2)^2$.
Déterminer la loi de Y et Z.

3 Espérance et Variance

3.1 Espérance

Définition 4. (Espérance d'une variable aléatoire réelle finie)
Soit X une variable aléatoire définie sur Ω.
On appelle espérance de X le réel noté $E(X)$ défini par

$$E(X) =$$

Remarque. L'espérance de X est donc la moyenne des valeurs prises par X pondérées par les probabilités de chacune de ces valeurs. A priori on a donc besoin de déterminer la loi de X pour calculer son espérance.

Exemple 5. Déterminer l'espérance des variables aléatoires X et Y de l'exemple 3

Proposition 3. (Propriétés de l'espérance) (preuve faite en exercice)

1. Si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ alors $E(X) \geq 0$
   Autrement dit : *si X est à valeurs positives, son espérance est positive.*
2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $E(aX + b) =$ ....
3. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω, alors $E(X + Y) =$ ....

Théorème 4. (Formule de transfert)
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et X une variable aléatoire, alors

$$E(f(X)) = \text{..}$$

Remarque. Quel est l'intérêt de cette formule ? Pouvoir calculer une espérance SANS connaître la loi ! En effet, on connaît la loi de X mais pas celle de Y : la formule de transfert nous permet d'en déduire quand même l'espérance de Y (ce que ne nous permet pas la définition de l'espérance de Y qui nécessite la loi de Y).

Exemple 6. Soit X une variable aléatoire réelle finie de loi donné ci-dessous. Déterminer $E(X^2)$.

k	-2	-1	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

Attention ! $E(X^2) \neq E(X)^2$

Définition 5. (Variable aléatoire centrée)
On dit que X est centrée si ....

Proposition 5. (Une variable aléatoire toujours centrée)
Si X est un variable aléatoire réelle finie, la variable $Y =$ .... est une variable centrée.

3.2 Variance

Définition 6. (Variance)
Soit X une variable aléatoire, on appelle variance le réel $V(X)$ défini par :

$$\mathrm{V}(X) =$$

On appelle écart-type le réel $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) =$$

Proposition 6. (Propriétés de la variance)

1. Si $\mathrm{V}(X) = 0$ alors X est une variable aléatoire certaine.
2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{V}(aX + b) =$ ....
3. $\mathrm{V}(X) =$ .... (Formule de Koenig-Huygens)

Remarque. Pour calculer une variance, on utilise plutôt la formule de Koenig-Huygens. La formule correspondant à la définition sert plutôt à établir des propriétés sur la variance.

Exemple 7. Déterminer la variance des variables aléatoires X et Y de l'exemple 3

Définition 7. (Variable aléatoire réduite)
On dit que X est réduite si ....

Proposition 7. (Une variable aléatoire toujours réduite)
Si X est un variable aléatoire réelle finie non certaine, la variable $Y =$ .... est réduite.

Définition 8. (Variable aléatoire centrée réduite)
On dit que X est centrée réduite si elle est centrée et réduite.

Proposition 8. (Une variable aléatoire toujours centrée réduite)
Si X est un variable aléatoire réelle finie non certaine, la variable $Y =$ .... est centrée réduite.
On l'appelle **variable centrée réduite associée à X.**

4 Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle finie

Définition 9. (Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle finie)
Soit X une variable aléatoire, on appelle fonction de répartition la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

....

Exemple 8.
On lance un dé équilibré et on note X le numéro obtenu. Rappeler la loi de X. Déterminer alors sa fonction de répartition $F_X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (on pourra distinguer les cas $t < 1, 1 \leq t < 2, \ldots, 5 \leq t < 6$ et $t \geq 6$) puis la dessiner.

Exemple 9.
Soit X une variable aléatoire réelle finie.

1. Exprimer F_{X^2} en fonction de F_X.
2. Soit f une bijection de $\mathbb{R}$, exprimer $F_{f(X)}$ en fonction de F_X.

Proposition 9. (Propriétés de la fonction de répartition)
Soit X une variable aléatoire, F_X sa fonction de répartition, et $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) \in [0, 1]$
2. F_X est croissante
3. $\forall x < x_1$, $F_X(x) = 0$
4. $\forall x > x_n$, $F_X(x) = 1$
5. F_X est continue par morceaux, ses points de discontinuités sont les x_i

Théorème 10. (Caractérisation d'une loi par sa fonction de répartition)
La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire.
Autrement dit : à toute loi correspond une et une seule fonction de répartition.

Remarque. Cas des variables aléatoires à valeurs entières
Si on donne la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire finie X telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$, on peut en déduire la loi de X par l'égalité :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

5 Lois usuelles finies

5.1 Variable aléatoire certaine

Définition 10. (Variable aléatoire certaine)
On appelle variable aléatoire certaine, une variable aléatoire X qui ne prend qu'une seule valeur. C'est à dire telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = a) = 1$.

Proposition 11. (Espérance et variance d'une variable aléatoire certaine) Soit X une variable aléatoire certaine prenant certainement la valeur a. On a alors :

$$E(X) = \ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad V(X) = \ldots\ldots\ldots.$$

5.2 Loi Uniforme sur les entiers

Définition 11. (Loi uniforme sur les entiers)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que X suit la loi uniforme sur l'intervalle d'entiers $[\![1, n]\!]$ (et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}\Big([\![1\ ;\ n]\!]\Big)$) si :

$$X(\Omega) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X = k) = \ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Autrement dit quand$X$ prend toutes ses valeurs avec la même probabilité.

Proposition 12. (Espérance et variance de la loi uniforme) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\Big([\![1\ ;\ n]\!]\Big)$, alors :

$$E(X) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad V(X) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 10. Une urne contient N boules dont r boules rouges et les autres noires. On tire successivement et sans remise $n <= N$ boules dans cette urne.

1. Déterminer, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la probabilité qu'on tire une boule rouge au $k - ième$ tirage.
2. On suppose que $n = N$ (on tire toutes les boules) et que $r = 1$ (il n'y a qu'une seule boule rouge). Déterminer le rang moyen de sortie de la boule rouge.
3. Proposer une fonction Scilab notée tirage(n) qui simule cette expérience et renvoie le rang de sortie de la boule rouge.
4. En déduire une fonction Scilab notée repetTirages(n,R) qui répète R fois cette expérience et renvoie le rang moyen de sortie de la boule rouge.

Remarque. Plus généralement, la loi uniforme sur $[\![a\ ;\ b]\!]$ (avec $a < b$, entiers relatifs) est notée $\mathcal{U}\Big([\![a\ ;\ b]\!]\Big)$:
$X \hookrightarrow \mathcal{U}\Big([\![a\ ;\ b]\!]\Big)$ si $X(\Omega) = [\![a\ ;\ b]\!]$ et si $\forall k \in [\![a\ ;\ b]\!],\ P(X = k) = \dfrac{1}{b - a + 1}$ (Il y a $b - a + 1$ valeurs dans $[\![a\ ;\ b]\!]$).
Les valeurs de l'espérance et de la variance sont à déduire de la loi uniforme $\mathcal{U}\Big([\![1\ ;\ b - a + 1]\!]\Big)$

Exemple 11. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\Big(\llbracket 0\ ;\ n \rrbracket\Big)$. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

5.3 Loi de Bernoulli

Définition 12. (Loi de Bernoulli)
Soit $p \in [0,1]$, on dit que la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p (et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$) si :

$$X(\Omega) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et} P(X=0) = 1-p \text{ et } P(X=1) = p.$$

Exemple 12. Cas typique :
On lance une pièce truquée dont la probabilité de tomber sur pile est $\frac{2}{3}$ et on note X la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat est pile et 0 si c'est face. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{2}{3}\right)$.

Exemple 13.
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Donner la loi de X^2, $2^X - 1$ et $2X - 1$.

Proposition 13. (Espérance et variance de la loi de Bernouilli) Soit $X\mathcal{B}(p)$, alors :

$$E(X) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad V(X) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

5.4 Loi Binomiale

Définition 13. (Loi binomiale)
Soit $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p (et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$) si :

$$X(\Omega) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1,n]\!],\ P(X=k) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Remarque.

1. La loi de Bernoulli est la loi binomiale de paramètre $n = 1$.
2. La loi binomiale est bien une loi de probabilité car :
   - $\forall k \in [\![1\ ;\ n]\!],\ \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \geq 0.$
   - $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1.$

Proposition 14. (Situation donnant une loi binomiale) Si on répète n fois, de façon indépendante, la même expérience et que l'on note X le nombre d'apparitions d'un certain évènement A lors de ces n répétitions. Si on pose $P(A) = p$, alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Exemple 14.

1. On lance 10 fois une pièce équilibrée et on note X le nombre de piles obtenus.
   Alors ....
2. On lance 3 fois un dé et on note X le nombre de 6 obtenus. Alors ....
3. On tire 5 boules **avec remise** dans une urne contenant 10 boules dont 3 noires et on note Z le nombre de boules noires obtenues. Alors ....

Attention ! On tire 5 boules **sans remise** dans une urne contenant 10 boules dont 3 noires et qu'on note Z le nombre de boules noires obtenues obtenus. Alors ....

Proposition 15. (Espérance et variance de la loi binomiale)
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors :

$$E(X) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad V(X) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 15. Si je lance 10 fois un dé équilibré, combien de fois vais-je obtenir un 6 en moyenne ?