Exercice 13

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

On effectue le changement de variable $s = \frac{t}{n}$ dans la première intégrale.

$s = \frac{t}{n}$ (donc $t = ns$)

$\hookrightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{1}{n}$ donc $dt = n\,ds$.

- $t = 0 \Longrightarrow s = 0$
- $t = n \Longrightarrow s = 1$

Ce chgt de var. est licite car $t \longmapsto \frac{t}{n} \in \mathcal{C}^1([0,n])$

Donc :

$$\int_0^n t^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^1 (ns)^x (1-s)^n \, n\,ds$$

$$= \int_0^1 n^{x+1} s^x (1-s)^n ds$$

$$= n^{x+1} \int_0^1 s^x (1-s)^n ds$$

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\quad I_n(x) = n^{x+1} J_n(x)}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$,

$$J_n(x) = \int_0^1 s^x (1-s)^n \, ds$$

$$= \left[\frac{s^{x+1}}{x+1} \times (1-s)^n \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{s^{x+1}}{x+1} \times -n(1-s)^{n-1} \, ds$$

$u = (1-s)^n \quad u' = -n(1-s)^{n-1}$

$v' = s^x \quad v = \frac{s^{x+1}}{x+1}$

$$= 0 + \frac{n}{x+1} \int_0^1 s^{x+1} (1-s)^{n-1} \, ds$$

$$= \frac{n}{x+1} J_{n-1}(x+1)$$

3. On a

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad J_n(x) = \frac{n}{x+1} J_{n-1}(x+1)$

$$= \frac{n}{x+1} \times \frac{n-1}{x+2} \times J_{n-2}(x+2)$$

$$= \frac{n!}{(x+1) \cdots (x+n)} J_0(x+n)$$ par une récurrence immédiate.

Or $J_0(x+n) = \int_0^1 s^{x+n} \, ds$

$$= \left[\frac{s^{x+n+1}}{x+n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{x+n+1}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad J_n(x) = \frac{n!}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n+1)}$

et $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad I_n(x) = \frac{n! \, n^{x+1}}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n+1)}$

Exercice 14

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,dx \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx.$$

1. Montrer que (I_n) est décroissante. Puis encadrer I_n pour montrer que (I_n) tend vers 0.
   Indication : on pourra encadrer $\ln(1+x^2)$.
2. Montrer de même que (J_n) est décroissante et tend vers 0.
3. A l'aide d'une intégration par partie, trouver pour tout $n \in \mathbb{N}$ une relation entre I_n et J_{n+2}.

1. • Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} \ln(1+x^2)\,dx - \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{n+1} \ln(1+x^2) - x^n \ln(1+x^2)\,dx$$

$$= \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)(x-1)\,dx$$

Or pour tout $x \in [0,1]$,

- $x^n \geq 0$
- $\ln(1+x^2) \geq 0$ (car $1+x^2 \geq 1$)
- $x-1 \leq 0$

Donc $x^n \ln(1+x^2)(x-1) \leq 0$

En intégrant sur $[0,1]$, on obtient :

$$\int_0^1 x^n \ln(1+x^2)(x-1)\,dx \leq 0$$

Donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$ d'où $\boxed{(I_n) \text{ est décroissante.}}$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in [0,1]$,

$$1 \leqslant 1+x^2 \leqslant 2$$

Par croissance de la fonction ln

d'où $\quad 0 \leqslant \ln(1+x^2) \leqslant \ln 2$

car $x^n \geqslant 0$

d'où $\quad 0 \leqslant x^n \ln(1+x^2) \leqslant x^n \ln 2$

En intégrant sur $[0,1]$, on obtient :

$$0 \leqslant \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,dx \leqslant \int_0^1 x^n \ln 2\,dx$$

$$\iff \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2 \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$\iff \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2 \times \frac{1}{n+1}$$

Or $\ln 2 \times \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\boxed{\text{Donc, par le th}^{\text{me}}\text{ d'encadrement, } I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$

Exercice 14

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,dx \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx.$$

1. Montrer que (I_n) est décroissante. Puis encadrer I_n pour montrer que (I_n) tend vers 0. *Indication : on pourra encadrer* $\ln(1+x^2)$.
2. Montrer de même que (J_n) est décroissante et tend vers 0.

2. $J_{n+1} - J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x^2}\,dx$$

Or $\forall x \in [0,1]$, $x-1 \leqslant 0$, $x^n \geqslant 0$ et $1+x^2 > 0$

Donc $\forall x \in [0,1]$, $\frac{x^n(x-1)}{1+x^2} \leqslant 0$

D'où, en intégrant sur $[0,1]$:

$$\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x^2}\,dx \leqslant 0$$

Donc $\boxed{(J_n) \text{ est décroissante.}}$

Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$0 \leqslant x^2 \leqslant 1$$

$$\Longleftrightarrow 1 \leqslant 1+x^2 \leqslant 2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x^n}{2} \leqslant \frac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$$

Donc, en intégrant sur $[0,1]$:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{2}\,dx \leqslant J_n \leqslant \int_0^1 x^n\,dx$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 x^n\,dx \leqslant J_n \leqslant \int_0^1 x^n\,dx$$

Or $\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

D'où : $\displaystyle\frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} \leqslant J_n < \frac{1}{n+1}$

Or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Donc, par th$^{\text{me}}$ d'encadrement, $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} J_n = 0}$

Exercice 14

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,dx \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx.$$

1. Montrer que (I_n) est décroissante. Puis encadrer I_n pour montrer que (I_n) tend vers 0. *Indication : on pourra encadrer* $\ln(1+x^2)$.
2. Montrer de même que (J_n) est décroissante et tend vers 0.
3. A l'aide d'une intégration par partie, trouver pour tout $n \in \mathbb{N}$ une relation entre I_n et J_{n+2}.

3. $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,dx$

$v' = x^n \qquad u = \ln(1+x^2)$

$v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \qquad u' = \dfrac{2x}{1+x^2}$

$$I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{n+1}\ln 2 - 0 - \frac{2}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}}$$

Exercice 15 – pour s'entrainer en autonomie

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_1^e (\ln(t))^n dt$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \int_1^e (\ln t)^{n+1} dt - \int_1^e (\ln t)^n dt$$
$$= \int_1^e (\ln t)^{n+1} - (\ln t)^n dt$$
$$= \int_1^e (\ln t)^n (\ln t - 1) dt.$$

Or pour tout $t \in [1, e]$, $0 \leqslant \ln t \leqslant 1$ donc $(\ln t)^n (\ln t - 1) \leqslant 0$

Donc, en intégrant cette inégalité sur $[1, e]$:

$$\int_1^e (\ln t)^n (\ln t - 1) dt \leqslant 0$$

On a donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$

D'où $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [1, e]$, $(\ln t)^n \geqslant 0$

Donc, en intégrant sur $[1, e]$:

$$\int_1^e (\ln t)^n dt \geqslant 0$$

D'où $u_n \geqslant 0$

$\boxed{(u_n) \text{ est décroissante et minorée par } 0 \text{ donc elle converge}}$

Exercice 15 – pour s'entrainer en autonomie

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_1^e (\ln(t))^n dt$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.
2. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre u_n et u_{n-1}.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n = \int_1^e 1 \times (\ln t)^n dt.$$

$$v' = 1 \qquad u = (\ln t)^n$$

$$v = t \qquad u' = n \times \frac{1}{t} \times (\ln t)^{n-1}$$

$$= \frac{n}{t} \times (\ln t)^{n-1}$$

$$u_n = \Big[t(\ln t)^n\Big]_1^e - \int_1^e t \times \frac{n}{t} \times (\ln t)^{n-1} dt$$

$$= e \times (\ln e)^n - 1 \times (\ln 1)^n - \int_1^e n (\ln t)^{n-1} dt$$

$$= e - n\, u_{n-1}$$

$$u_1 = e - u_0$$

D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = e - n\, u_{n-1}}$

$$u_1 = \Big[t \ln t - t\Big]_1^e = 1 < \frac{e}{2}$$

Exercice 15 – pour s'entrainer en autonomie

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_1^e (\ln(t))^n dt$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.
2. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre u_n et u_{n-1}.
3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$ puis donner la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$.

3. On a, d'après la question 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = e - n\, u_{n-1}$$

C'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = e - (n+1) u_n.$$

Or on a vu que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq 0$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $e - (n+1) u_n \geq 0$

$$\iff e \geq (n+1) u_n$$

$$\iff \frac{e}{n+1} \geq u_n$$

D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ donc, par encadrement : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$

Exercice 17

1. $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx = \left[-\frac{(1-x)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad I_n \underset{\substack{u = x^n \quad v' = \sqrt{1-x} \\ u' = n x^{n-1} \quad v = -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}}}{=\!=\!=} \left[-\frac{2}{3} x^n (1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \frac{2}{3} n \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{3/2}\,dx$$

$a^{3/2} = \sqrt{a} \times a$

$$\Leftrightarrow \quad I_n = \frac{2}{3} n \int_0^1 x^{n-1} \sqrt{1-x}\,(1-x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad I_n = \frac{2n}{3} \int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x} - x^n \sqrt{1-x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad I_n = \frac{2n}{3} I_{n-1} - \frac{2n}{3} I_n$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2n}{3} I_n + I_n = \frac{2n}{3} I_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}}$$

3. On va faire mieux que ce qui est demandé :

$$I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$$

$$= \frac{2n}{2n+3} \times \frac{2(n-1)}{2n+1} I_{n-2}$$

$$\dots$$

$$= \frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots \times 2}{(2n+3)(2n+1)\cdots \times 5} I_0$$

$$= \frac{2^n \times n!}{(2n+3)(2n+1)\cdots \times 5} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2^n \times n! \times (2n+2)\times 2n(2n-2)\cdots \times 2}{(2n+3)!} \times 2$$

$$= \frac{2^n \times n! \times 2^{n+1}(n+1)!}{(2n+3)!} \times 2$$

$$= \frac{2^{2n+2} \times n!(n+1)!}{(2n+3)!}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{2^{n+2}\, n!(n+1)!}{(2n+3)!}}$$

Exercice 18

1°) $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1} = \int_0^1 dx = \boxed{1.}$

$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\operatorname{Arctan} x\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

2°) Soit $n \geqslant 0$.

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$$

$$\underset{\substack{u=\frac{1}{(1+x^2)^n} \quad v'=1 \\ u'=\frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}} \quad v=x}}{=\!=\!=} \left[\frac{x}{(1+x^2)^n}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-2n\,x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{x^2+1}{(1+x^2)^{n+1}} - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2^n} + 2n\left(\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2^n} + 2n\, I_n - 2n\, I_{n+1}$$

Donc $\quad I_n = \frac{1}{2^n} + 2n\, I_n - 2n\, I_{n+1}$

$$\Longleftrightarrow\ 2n\, I_{n+1} = \frac{1}{2^n} + (2n-1)\, I_n$$

$$\Longleftrightarrow\ \boxed{I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{n \times 2^{n+1}}.}$$

3. $I_2 = \underbrace{\frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2^2}}_{n=1} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{\pi + 2}{8}}$

$I_3 = \underbrace{\frac{3}{4} I_2 + \frac{1}{2 \times 2^3}}_{n=2} = \frac{3}{4} \times \frac{\pi + 2}{8} + \frac{1}{16} = \boxed{\frac{3\pi + 8}{32}}$

Exercice 19

1. Pour tout $t \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq t^n \leq 1$$
$$\Longleftrightarrow \quad 1 \leq 1+t^n \leq 2$$
$$\Longleftrightarrow \quad 1 \geq \frac{1}{1+t^n} \geq \frac{1}{2}$$
$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t^n} \leq 1$$
$$\Longleftrightarrow \quad \frac{t^n}{2} \leq \frac{t^n}{1+t^n} \leq t^n$$
$$\Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{t^n}{1+t^n} \leq t^n$$

En intégrant sur $[0,1]$, on obtient :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,dt \leq \int_0^1 t^n\,dt.$$

Or $\int_0^1 t^n\,dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

Donc $0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,dt \leq \frac{1}{n+1}$

Or $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\boxed{\text{Donc, par encadrement, } \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,dt = 0}$