Programme de colle n° 15
Semaine du 01/02/2021
Intégration sur un segment

Sur les intégrales, vous devez maîtriser :

- Le calcul direct d'une intégrale à l'aide des intégrales de référence
- L'intégration par partie
- Le changement de variable.
- Les inégalités et les intégrales
- Le théorème fondamental de l'analyse
- Les sommes de Riemann.

A partir de cette semaine, je distingue les exercices à préparer selon votre groupe : A ou A'. Les membres du groupe A' sont listés en page 2. Les autres sont membres du groupe A. Si un.e membre du groupe A veut préparer les exercices du groupe A', il.elle le peut, mais à ses risques et périls ! Le contraire n'est pas contre, bien sûr, pas autorisé.

Exercices préparés groupe A

Ces exercices doivent être réalisés sans la moindre hésitation, en moins de 10 minutes.

Exercice préparé n° 1 (extrait de l'exercice 24)

On pose, pour tout $n \geq 0$:

$$u_n = \int_0^1 t^n e^{1-t} \mathrm{d}t.$$

1. Calculer u_0.
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$. En déduire la limite de (u_n).

Exercice préparé n° 2 (extrait de l'exercice 28)

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est impaire.
2. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et déterminer $f'(x)$.

Exercice préparé n° 3 (extrait de l'exercice 25)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0 et J_0.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{e^{-n}}{2} - J_n\right)$.

Exercices préparés groupe A'

Ces exercices doivent être réalisés sans la moindre hésitation, en moins de 10 minutes.
Vous trouverez un corrigés des exercices 17 et 18 sur la feuille des corrigés le FE13 disponible ici sur cahier de prépa.
Membres du groupe A' :

- Yusef
- Hafsa
- Ismail
- Dan
- Lina
- Cédric
- Mylanh
- Maxime
- Yacine
- Anis

Exercice préparé n^{o} 1 (C'est l'exercice 17)

On pose, pour tout $n \geq 0$:

$$I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer I_0.
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$.
3. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

Exercice préparé n^{o} 2 (C'est l'exercice 18)

On pose, pour tout $n \geq 0$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\mathrm{d}t.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (I_n).

Exercice préparé n^{o} 3

Énoncer et démontrer le théorème de convergence des sommes de Riemann dans le cas d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$.