DM n° 9 - Suite d'intégrales et formules de Taylor

*Pour ce DM, le travail en groupe est encouragé. Vous pouvez travailler par groupe de 2 ou 3 étudiant.e.s maximum, **de niveau homogène**.*

Chaque participant du groupe devra avoir rédigé une partie non négligeable du DM, partie ayant une intersection non vide avec chaque exercice. Chaque participant devra avoir participé activement aux parties rédigées par les autres - ainsi que par lui-même.

Exercice 1 - pour tout le monde

Les questions marquées $(*)$ sont facultatives pour le groupe A et obligatoires pour le groupe A'.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^n\,(x+1)}$.

1. (a) déterminer deux réels a et b tels que pour tout x différent de -1 et de 0, on ait :
$$\frac{1}{x\,(x+1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}$$
   (b) En déduire la valeur de I_1.

2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :
$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$$
   (b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, calculer $I_n + I_{n+1}$.
   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (c) $(*)$ En déduire un que $I_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

4. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^n\,(x+1)^2}$.

   (a) Calculer J_0.
   (b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de I_k.
   (c) $(*)$ Déterminer alors pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\, I_k$ en fonction de J_n.
   (d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{4(n-1)}$.Donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.
   (e) $(*)$ En déduire la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\, I_k$.

5. A l'aide des questions 3a) et 4b) , compléter les commandes Scilab suivantes afin qu'elles permettent le calcul de I_n et J_n pour une valeur de n, supérieure ou égale à 2, entrée par l'utilisateur.

```
n=input("entrer une valeur de n supérieure ou égale à 2 : ")\\
I= Log(2) ; J=1/2 ; J=-----\\
for k=2:n \\
I=------- ; J=-------- ; end \\
disp(I, "la valeur de I est : ") \\
disp(J, "la valeur de J est : ") \\
```

Exercice 2 pour le groupe A

On définit, pour tout entier $n \geq 0$ la suite (R_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \int_0^2 \frac{(2-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t.$$

1. Calculer R_0, R_1 et R_2 (on pourra utiliser une IPP pour la dernière).
2. Établir que pour tout entier $n \geq 0$, $0 \leq R_n \leq \dfrac{2^n}{n!}(e^2 - 1)$. En déduire la limite de la suite (R_n).
3. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $R_{n+1} = R_n - \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.
4. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + I_n$$
.
5. En déduire la limite suivante :
$$\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}.$$

Exercice 2 pour le groupe A'

Partie 1 : Formule de Taylor avec reste intégral

On considère un entier $N \geq 1$ et une fonction f de classe $\mathcal{C}^{N+1}$ sur un intervalle I contenant 0. Et on considère un réel $x \in I$.
On définit, pour tout entier $n \in [\![0, N]\!]$ le réel $R_n(x)$ par :

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t.$$

1. Justifier que $R_n(x)$ est bien défini.
2. Démontrer que :
$$f(x) = f(0) + R_0(x).$$
3. Démontrer que, pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$, $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) + R_{n+1}(x)$.
4. En déduire que, pour tout $n \in [\![0, N]\!]$:
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + R_n(x).$$
Cette égalité est la ***formule de Taylor avec Reste intégral à l'ordre*** n *appliquée à la fonction* f *entre* 0 *et* x. *Le polynôme* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$ *est appelé* ***polynôme de Taylor d'ordre*** n ***associé à*** f ***(en*** 0***)***
5. On suppose maintenant qu'il existe un réel M_x tel que pour tout $t \in [0, x]$ (ou $[x, 0]$ si $x < 0$), $\left|f^{(N+1)}(t)\right| \leq M_x$.
Montrer qu'alors :
$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| \leq M \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$$
Pour cela, vous distinguerez le cas $x > 0$ du cas $x < 0$.
*Cette inégalité est l'****Inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre*** N *appliquée à la fonction* f *entre* 0 *et* x.

Partie 2 : Applications

1. On considère ici que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\dfrac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $M_x = \max(e^x, 1)$. Justifier que que tout $t \in [0, x]$ (ou $[x, 0]$ si $x < 0$), $\left|f^{(N+1)}(t)\right| \leq M_x$.

   (c) En déduire, à l'aide de l'inégalité de Taylor Lagrange que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

2. On considère ici que f est la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

   (a) Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x)$, puis vérifier que $f^{(k)}(0) = \dfrac{1}{(k-1)!}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\dfrac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$. Écrire alors sous forme développée $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$ Justifier que que tout $t \in [0, x]$ (ou $[x, 0]$ si $x < 0$), $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq \dfrac{1}{n}$.

   (d) En déduire, à l'aide de l'inégalité de Taylor Lagrange que :

$$\forall x \in]1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

   (e) Redémontrer le résultat précédent par un calcul direct de la somme ci-dessus.