Sujet 1

Exercice préparé :

On pose, pour tout $n \geq 0$:

$$u_n = \int_0^1 t^n e^{1-t} \mathrm{d}t.$$

1. Calculer u_0.
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 1 :

A l'aide d'un changement de variable, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_3^4 \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx \qquad (\text{Poser} : t = 1 + x^2)$$

Exercice 2

Sujet 2

Exercice préparé :

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est impaire.

2. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et déterminer $f'(x)$.

Exercice 1 :

A l'aide d'un changement de variable, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}} \qquad (\text{Poser} : t = e^x)$$

Exercice 2 :

Soit $\varphi : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t}\, dt.$

1) Montrer que φ est impaire sur $\mathbb{R}^*$.
2) Montrer soigneusement que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
3) Montrer que la fonction $\psi : x \longmapsto x\varphi'(x)$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.
4) En déduire une expression de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}^*$.

Sujet 3

Exercice préparé :

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0 et J_0.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{e^{-n}}{2} - J_n\right)$.

Exercice 1 :

A l'aide d'un changement de variable, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5 x \cos^3 x \; dx \qquad (\text{Poser} : t = \sin x)$$

Exercice 2 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\, dt$.

1) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire $J_n = \ln(2) - I_n$ sous forme intégrale et montrer que $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
3) En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

On dispose de 12 pièces numérotées de 1 à 12 et on suppose que, pour tout $k \in [\![1, 12]\!]$, la $k^{\text{ième}}$ pièce tombe sur FACE avec probabilité $\dfrac{k}{12}$. On lance une pièce au hasard et on obtient PILE. Quelle est la probabilité d'avoir lancé la sixième pièce ?

Sujet 4

Exercice préparé :

On pose, pour tout $n \geq 0$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} \mathrm{d}t.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (I_n).

Exercice 1 :

A l'aide d'un changement de variable, déterminer l'intégrale suivante :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx \qquad (\text{poser} : t = \sin^2 x)$$

Exercice 2 : Lemme de Riemann-Lebesgue

A l'aide d'une intégration par partie, montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t) \cos(nt)\, dt = 0.$$

Sujet 5

Exercice préparé :

On pose, pour tout $n \geq 0$:

$$I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t}\mathrm{d}t.$$

1. Calculer I_0.
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$.
3. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

Exercice 1 :

A l'aide d'un changement de variable, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\, dx \qquad (\text{Poser} : x = \cos t)$$

Exercice 2 :

Démontrer que la suite ci-dessous tend vers 2 (se ramener à une somme de Riemann) :

$$u_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n\, n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$