Feuille d'exercices n°14 - Variables aléatoires réelles finies

Exercice 1 (*)

Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues. On tire 2 boules successivement, sans remise. On désigne par X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi de $Y = (X_1 - 1)^2$.

Exercice 2 (*)

Soit X_2 une variable aléatoire prenant les valeurs 3, 4, 5 et 6. Déterminer la loi de probabilité de X_2 sachant que :

$$P(X_2 = 3) = P(X_2 = 4) \ ; \ P(X_2 < 5) = P(X_2 > 5) = \frac{1}{3}.$$

Exercice 3 (*)

On considère un jeu de 52 cartes traditionnel et on pioche une carte au hasard dans le paquet. On note alors X_3 la valeur de la carte piochée avec la valeur 1 pour un as, 2 pour un deux, ... , 10 pour un dix, 11 pour un valet, 12 pour une dame et 13 pour un roi.
Déterminer la loi de X_3.

Exercice 4 (*)

En reprenant les variables aléatoires des exercices précédents :

1. Déterminer l'espérance de X_1, X_2, X_3.
2. Déterminer l'espérance de $Y = 6X_2 - 1$.
3. Déterminer la variance de X_2 et de $Y = 6X_2 - 1$

Exercice 5 $(*)$

On écrit dans Scilab la suite d'instructions suivante :

```
X=grand(1,10^6, "uin",1,6)
E=sum(X)/length(X)
```

1. Que contient la variable X à la fin ?
2. Donner une valeur approchée de la variable E en justifiant votre réponse.

Exercice 6

On exécute dans Scilab le programme ci-dessous :

```
1. R=[]
2. for k=1 :10^6
3.    X=grand(1,10, "uin",1,6)
4.    Y= sum(X==6)]
5.    R=[R,Y]
6. end
7. disp(sum(R)/length(R))
```

1. Que contiennent les variables X et Y après le passage du programme à la ligne 4 ?
2. Que contient la liste R à la sortie de la boucle for.
3. Donner une valeur approchée de la variable affichée en sortie. En justifiant votre réponse.
4. Proposez un programme identique, plus efficace en tant de calcul.

Exercice 7

Soit $X \hookrightarrow B(n,p)$. Calculer l'espérance de $Y = 2^X$.

Exercice 8

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![-2,2]\!])$ et

$$Y = \frac{X + |X|}{2}.$$

Déterminer la loi de Y puis son espérance et sa variance.

Exercice 9

Déterminer dans chaque cas, la loi de X, son espérance et sa variance.

a. X est le nombre de Pile obtenu en lançant 4 fois une pièce de monnaie équilibrée

b. X est le nombre de Pile obtenu en lançant 4 fois une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur Pile est de $\frac{1}{3}$.

Exercice 10

On tire sans remise des boules dans une urne contenant 4 noires et deux blanches. On note X le nombre de tirages successifs pour obtenir une blanche.

1. Déterminer la loi de X, tracer sa fonction de répartition.

2. Déterminer $E(X), E(X^2)$ et $E(X^3)$

3. Déterminer $V(X)$

Exercice 11

On considère 4 variable aléatoire N_1, N_2, N_3, N_4, indépendantes, suivant la loi $\mathcal{U}([\![0,2]\!])$ et on note X leur produit. Donner la loi de X.

Exercice 12 (**)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue deux tirages successifs et sans remise. On note :

- X_i la variable aléatoire égale au numéro de la i-ième boule tirée.
- Z la variable aléatoire égale au plus petit des deux numéros obtenus.

1. Déterminer la loi de Z (on pensera à commencer par donner $Z(\Omega)$).

2. Vérifier par le calcul qu'on a bien :

$$\sum_{k \in Z(\Omega)} P(Z = k) = 1$$

3. Déterminer $E(Z)$.

Exercice 13

On dispose d'une urne qui contient des boules blanches et noires, avec une proportion de boules blanches égale à $\frac{1}{3}$. Un joueur tire une à une, successivement et avec remise, des boules de l'urne. Le jeu s'arrête dans deux cas :

- soit lorsqu'il tire une boule blanche ;
- soit lorsqu'il a réalisé $n \in \mathbb{N}^*$ tirages.

On introduit la variable X_n égale au nombre de tirages effectués par le joueur.

1. Déterminer la loi de X_2.
2. Déterminer la loi de X_3.
3. Déterminer la loi de X_n en général.

On pourra noter B_i l'évènement « la i-ième boule tirée est blanche ».

Exercice 14 (**)

Une rune contient 6 rouges et 3 vertes. On tire successivement et sans remise 4 boules de cette urne et on note X (resp. Y) le nombre de rouges obtenues (resp. de vertes).

1. Déterminer la loi de X de deux façons :

a. En considérant les évènements élémentaires R_i et V_i

b. En dénombrant.

2. En déduire la loi de Y.

3. Déterminer la variance et l'espérance de X et de Y.

Exercice 15

Une demi-droite est divisée en segments de longueur 1, numérotés 0,1,2,3,... de gauche à droite.
Une puce se déplace vers la droite en faisant des sauts de longueur 1 ou 2, au hasard. On supposera les sauts indépendants.
Au départ, elle est sur la case 0.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par la puce après n sauts.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_1, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de probabilité de X_2, son espérance et sa variance.
3. (a) Soit Y_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où la puce a effectué un saut de deux cases au cours des n premiers sauts. Reconnaître la loi de probabilité de Y_n. Calculer son espérance et sa variance.
   (b) Exprimer X_n en fonction de Y_n. En déduire la loi de probabilité de X_n, son espérance et sa variance.

Exercice 16

Dans tout l'exercice, a et b sont des entiers naturels non nuls. On considère une urne initialement constituée de a boules blanches et b boules noires, dans laquelle on effectue des tirages successifs au hasard et avec remise d'une boule en procédant de la fonçon suivante :
- lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant
- lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne mais est remplacée par une boule blanche, avant le tirage suivant

1. Recopier et compléter le script scilab suivant, afin qu'il affiche le nombre de boules blanches à l'issue de n tirages : on rappelle que `rand()` renvoie un réel au hasard entre 0 et 1.
```
a=input("nombre de blanches au départ") ; b=input("nombre de noires au départ") ;
n=input("nombre de tirages");
x= ...... ;
for i=1:n
if ................. then, x=........... end;
end; disp(x)
```
2. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule blanche.
   (a) Ecrire un script scilab qui simule une réalisation de la variable Y.
   (b) Préciser soigneusement l'ensemble des valeurs prises par la variable Y.
   (c) Pour tout entier k compris entre 1 et $b+1$, calculer $P(Y=k)$.
   (d) Vérifier que $P(Y=b+1)=\frac{b!}{(a+b)^b}$ et que pour tout $k \in [\![1,b]\!]$, la formule suivante est vraie :
   $$P(Y=k)=\frac{b!}{(b-(k-1))!(a+b)^{k-1}}-\frac{b!}{(b-k)!(a+b)^k}.$$
   (e) Soit $M \in \mathbb{N}^*$, et $a_0, a_1, ..., a_M$ une famille de réels. Etablir : $\sum_{k=1}^{M} k(a_{k-1}-a_k)=\left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k\right)-Ma_M$.
   (f) En déduire que $E(Y)=\sum_{k=0}^{b} \frac{b!}{(b-k)!(a+b)^k}$.
3. On introduit pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n le nombre aléatoire de boules noires obtenues au cours des n premiers tirages avec pour convention $X_0=0$, et pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, $p_{n,k}$ la probabilité de l'événement "au cours des n premiers tirages, on a obtenu exactement k boules noires".
   On remarquera que $p_{0,0}=1$ et que $p_{n,k}=0$ si $k>n$ ou si $k>b$.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $p_{n,0}$ puis $p_{n,n}$. Que vaut $\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}$?
   (b) Démontrer la formule suivante valable pour tout $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$:
   $(a+b)p_{n,k}=(a+k)p_{n-1,k}+(b+1-k)p_{n-1,k-1}$.
   (c) En déduire que $(a+b)E(X_n)=\sum_{k=0}^{n-1}[b+k(a+b-1)]p_{n-1,k}$.

Exercices d'entrainement supplémentaires

Exercice 17 (**)

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et à valeurs dans $[\![1, 10]\!]$ dont la loi vérifie : $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall k \in X(\Omega), P(X = k) = \alpha \times k$.

1. Calculer α.
2. Déterminer l'espérance et la variance de X. *On pourra utiliser la formule :* $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$.
3. Déterminer la loi, l'espérance puis la variance de $Y = X + 1$.

Exercice 18 (**)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n boîtes B_1, ..., B_n. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la boîte B_k contient k jetons numérotés de 1 à k. On choisit au hasard une boîte puis on tire un jeton. On note X la variable égale au numéro du jeton obtenu. Déterminer la loi de X. (*on pourra commencer par déterminer* $P(X = 1)$ ...)

Exercice 19 (**)

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Les résultats de X sont censés être affichés par un compteur mais celui-ci est détraqué : lorsque X prend une valeur non nulle, le compteur affiche la bonne valeur de X, mais lorsque X prend la valeur 0, le compteur affiche un entier au hasard entre 1 et n.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre affiché par le compteur.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Montrer que $E(Y) \geq E(X)$. Aurait-on pu deviner ce résultat ?

Exercice 20 (**)

Une urne contient 2 boules blanches et $n - 2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise de cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche, Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne et Z le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi de X et son espérance.
2. Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$.
3. Déterminer la loi de Z.
4. Sans faire aucun calcul, retrouver le résultat de la question 3 en justifiant que X et $n - Z$ suivent la même loi (on pourra pour cela penser à lire de droite à gauche).

Exercice 21 (***)

On reprend l'exercice précédent avec b boules blanches (b un entier supérieur ou égal à 2) et $n - b$ boules rouges.

1. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n - b + 1]\!]$:

$$P(X = k) = \frac{\binom{n-k}{b-1}}{\binom{n}{b}}$$

2. Interpréter ce résultat en remarquant qu'un tirage de toutes les boules de l'urne revient à choisir de façon équiprobable les rangs de sortie des b boules blanches.

Exercice 22 (*)

Tracer la fonction de répartition :

1. de la loi uniforme sur $[\![1, 4]\!]$
2. de la loi binomiale $\mathcal{B}(2, \frac{1}{4})$.

Exercice 23 (*)

Une étude statistique a permis de déterminer que 10% de la population est gauchère.
Calculer la probabilité qu'un groupe de 8 personnes contienne :

(a) un seul gaucher

(b) au moins 2 gauchers

on pourra introduire une variable aléatoire X judicieuse ...

Exercice 24(**)

On lance deux fois un dé non pipé. X est le plus petit des nombres obtenus et Y est le plus grand. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X et de Y.

Exercice 25 (**)

On considère une urne contenant a boules noires et b boules blanches. On effectue un tirage de n boules simultanément avec $n \leq a$ et $n \leq b$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.

1. Déterminer la loi de X.
2. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{a-1}{k}\binom{b}{n-1-k} = \binom{a+b-1}{n-1}.$$

3. En déduire $E(X)$.

Exercice 26 (***)

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune $2n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) boules numérotées de 1 à $2n$. On prélève au hasard n boules dans U_1 et n boules dans U_2. Soit V la variable aléatoire égale au nombre de numéros communs aux deux prélèvements.

Déterminer la loi de V et son espérance.

On pourra utiliser à bon escient la formule de Vandermonde :
$\forall (p,q,n) \in \mathbb{N}^3,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$.

Exercice 27 (**)

Donner les valeurs respectives des sommes suivantes sans calcul, à l'aide des lois classiques :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} (k^2+k)\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n \ ,\ S_2 = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)\binom{n}{k}3^k$$

Exercice 28 (*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient 3 boules : une blanche, une rouge et une verte. On effectue n tirages successifs avec remise. Si $i \in \{2, \ldots, n\}$, on dit qu'il y a changement de couleur au $i^{\text{ème}}$ tirage si la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est d'une couleur différente de la $(i-1)^{\text{ème}}$ boule. On note X la variable aléatoire égale au nombre de changement de couleur intervenants au cours des n tirages.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 29(**)

Toutes les variables aléatoires permettant de modéliser cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.

Un joueur A lance le dé $6n$ fois. On dit qu'il gagne s'il obtient au moins n fois la face 6. Un joueur B lance le dé $6(n+1)$ fois. On dit qu'il gagne s'il obtient au moins $(n+1)$ fois la face 6.

Le but de l'exercice est de déterminer qui a le plus de chances de gagner.

On note X_n le nombre de fois où B obtient la face 6 au cours de $6n$ premiers lancers, Y le nombre de fois où il obtient la face 6 au cours des 6 derniers lancers et on pose $X_{n+1} = X_n + Y$.

1. Quelle est la loi de Y ?
2. On pose $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_p\}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. La famille $((Y = y_r))_{1 \leq r \leq p}$ est un système complet d'événements où tous les événements sont de probabilité non nulle. En utilisant de façon pertinente la formule des probabilités totales associées à ce système complet d'événements, montrer que

$$P(X_{n+1} \geq n+1) = P(X_n \geq n) + \sum_{r=0}^{6} \left[P(X_n \geq n+1-r) - P(X_n \geq n)\right] P(Y = r).$$

3. (a) Montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, 6\}$, $P(X_n = n-k-1) \leq P(X_n = n-k)$.
   (b) Montrer que $\forall r \in \{0, \ldots, 6\}$,

$$P(X_n \geq n+1-r) - P(X_n \geq n) \leq (r-1)P(X_n = n).$$

4. Conclure.