Soit $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$.

On va montrer que $E(X) = mp$.

$$E(X) = \sum_{k=0}^{m} k\, P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} k \times \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}.$$

car pour $k=0$, $k \times \binom{m}{k} p^k (1-p)^k = 0$

$$= \sum_{k=1}^{m} k \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$$

Or $k\binom{m}{k} = m\binom{m-1}{k-1}$ (Formule du comité-président)

Donc $$E(X) = \sum_{k=1}^{m} m \binom{m-1}{k-1} p^k (1-p)^{m-k}$$

$$= m \sum_{k=1}^{m} \binom{m-1}{k-1} p^k (1-p)^{m-k}$$

Changement d'indice : $k' = k-1$ donc $k = k'+1$

$$= m \sum_{k'=0}^{m-1} \binom{m-1}{k'} p^{k'+1} (1-p)^{m-(k'+1)}$$

$$= m \sum_{k'=0}^{m-1} \binom{m-1}{k'} p^{k'} \times p\, (1-p)^{m-1-k'}$$

$$= np \underbrace{\sum_{k'=0}^{n-1} \binom{n-1}{k'} p^{k'} (1-p)^{n-1-k'}}_{\text{formule du binôme de Newton}}$$

$$= np \times (p + 1 - p)^{n-1}$$

$$= np \times 1^{n-1}$$

$$= np$$

Donc $\boxed{E(X) = np}$