

# Programme de colle n° 16

## Semaine du 08/02/2021

### Variables Aléatoires sur un Univers fini

Les questions de cours se trouvent à la page suivante. Ne les négligez pas !

#### Exercices préparés groupe A

Ces exercices doivent être réalisés sans la moindre hésitation, en moins de 10 minutes.

##### Exercice préparé n° 1

Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues. On tire 2 boules successivement, sans remise. On désigne par  $X_1$  la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

1. Déterminer la loi de  $X_1$ .
2. Déterminer la loi de  $Y = (X_1 - 1)^2$ .

##### Exercice préparé n° 2

Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket -2, 2 \rrbracket)$  et

$$Y = \frac{X + |X|}{2}.$$

Déterminer la loi de  $Y$  puis son espérance et sa variance.

##### Exercice préparé n° 3

Donner et démontrer la formule de l'espérance et de la variance de la loi  $\mathcal{U}(\llbracket 1 ; n \rrbracket)$ .

#### Exercices préparés groupe A'

Ces exercices doivent être réalisés sans la moindre hésitation, en moins de 10 minutes.

##### Exercice préparé n° 1

Donner et démontrer la formule de l'espérance et de la variance de la loi  $\mathcal{U}(\llbracket 1 ; n \rrbracket)$ .

##### Exercice préparé n° 2

Donner et démontrer la formule de l'espérance de la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ .  
([Voir la démonstration ici](#))

##### Exercice préparé n° 3

Donner et démontrer la formule de la variance de la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ .  
([Démonstration bientôt disponible ici](#))

## Questions de cours

Les questions marquées (\*) sont réservées au groupe A'.

### 1. Généralités sur les variables aléatoires.

- (a) Donner la définition d'une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini.
- (b) Qu'appelle-t-on support d'une variable aléatoire  $X$  et comment le note-t-on ?  
(\*) D'où vient cette notation ?
- (c) (\*) Qu'appelle-t-on "s.c.e" associé à une variable aléatoire finie  $X$  ?
- (d) Si on note  $Y$  le nombre de pile obtenus 3 lancers successifs d'une pièce, Donner le s.c.e. associé à variable aléatoire  $Y$ .
- (e) Qu'appelle-t-on loi d'une variable aléatoire  $X$  ?

### 2. Espérance et variance.

- (a) Donner la définition de l'espérance d'une variable aléatoire finie  $X$ .
- (b) Donner les trois propriétés de l'espérance vue en cours :
- (c) Donner la formule du transfert. L'appliquer pour calculer  $E(2^X)$  dans le cas où  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0 ; 3 \rrbracket)$ .
- (d) Qu'appelle-t-on une variable aléatoire centrée ?
- (e) Donner la définition de la variance et de l'écart-type d'une variable aléatoire  $X$ .
- (f) Donner les trois propriétés de la variance vue en cours :
- (g) Qu'appelle-t-on une variable réduite ? Une variable centrée réduite ? Qu'appelle-t-on la variable centrée-réduite associée à une variable aléatoire  $X$  ?

### 3. Lois usuelles

- (a) Loi uniforme sur  $\llbracket a, b \rrbracket$ .
  - Décrire la loi uniforme sur  $\llbracket a, b \rrbracket$ .
  - Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1 ; n \rrbracket)$ . Donner  $E(X)$  et  $V(X)$ .
- (b) Loi de Bernoulli
  - Décrire la loi de Bernoulli.
  - Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ . Donner  $E(X)$  et  $V(X)$ .
- (c) Loi Binomiale
  - Décrire la Binomiale. Expliquer dans quelle situation elle se présente.
  - Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ . Donner  $E(X)$  et  $V(X)$ .