Programme de colle n° 16
Semaine du 08/02/2021
Variables Aléatoires sur un Univers fini

Les questions de cours se trouvent à la page suivante. Ne les négligez pas !

Exercices préparés groupe A

Ces exercices doivent être réalisés sans la moindre hésitation, en moins de 10 minutes.

Exercice préparé n° 1

Une urne contient 5 boules rouges, 5 boules blanches et 6 boules bleues. On tire 2 boules successivement, sans remise. On désigne par X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi de $Y = (X_1 - 1)^2$.

Exercice préparé n° 2

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket -2,2 \rrbracket)$ et

$$Y = \frac{X + |X|}{2}.$$

Déterminer la loi de Y puis son espérance et sa variance.

Exercice préparé n° 3

Donner et démontrer la formule de l'espérance et de la variance de la loi $\mathcal{U}\Big(\llbracket 1\ ;\ n \rrbracket\Big)$.

Exercices préparés groupe A'

Ces exercices doivent être réalisés sans la moindre hésitation, en moins de 10 minutes.

Exercice préparé n° 1

Donner et démontrer la formule de l'espérance et de la variance de la loi $\mathcal{U}\Big(\llbracket 1\ ;\ n \rrbracket\Big)$.

Exercice préparé n° 2

Donner et démontrer la formule de l'espérance de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
(Voir la démonstration ici)

Exercice préparé n° 3

Donner et démontrer la formule de la variance de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
(Démonstration bientôt disponible ici)

Questions de cours

Les questions marquées $(*)$ *sont réservées au groupe* A'.

1. Généralités sur les variables aléatoires.

   (a) Donner la définition d'une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini..
   Réponse attendue : Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini.
   Ω *est donc un ensemble fini.* On dit que X est une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ si f est une application de Ω dans $\mathbb{R}$

   (b) Qu'appelle-t-on support d'une variable aléatoire X et comment le note-t-on ?
   $(*)$ D'où vient cette notation ?
   Réponse attendue : Le support d'une variable aléatoire X et l'ensemble des valeurs que peut prendre X. On le note $X(\Omega)$.
   Cette notation vient du fait que l'ensemble des valeurs que prend une fonction f définie sur un ensemble I se note $f(I)$. Ici X est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

   (c) $(*)$ Qu'appelle-t-on "s.c.e" associé à une variable aléatoire finie X ?

   Réponse attendue : C'est l'ensemble des évènements "$(X = k)$" où $k \in X(\Omega)$.

   (d) Si on note Y le nombre de pile obtenus 3 lancers successifs d'une pièce, Donner le s.c.e. associé à variable aléatoire Y.
   Réponse attendue : $\Big\{\{Y = 0\}, \{Y = 1\}, \{Y = 2\}, \{Y = 3\}\Big\}$

   (e) Qu'appelle-t-on loi d'une variable aléatoire X ?
   Réponse attendue : C'est la donnée de la valeur de $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.

2. Espérance et variance.

   (a) Donner la définition de l'espérance d'une variable aléatoire finie X.
   Réponse attendue : $E(X)$ est la somme des $k \times P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$. Autrement dit :
   $$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k).$$

   (b) Donner les trois propriétés de l'espérance vue en cours :
   Réponse attendue :
      i. Si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ alors $E(X) \geq 0$
      Autrement dit : *si* X *est à valeurs positives, son espérance est positive.*
      ii. $E(aX + b) = aE(X) + b$
      iii. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

   (c) Donner la formule du transfert. L'appliquer pour calculer $E(2^X)$ dans le cas où $X \hookrightarrow \mathcal{U}\Big([\![0\ ;\ 3]\!]\Big)$.
   Réponse attendue : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et X une variable aléatoire, alors
   $$E\Big(f(X)\Big) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k)P(X = k).$$
   Dans le cas où $X \hookrightarrow \mathcal{U}\Big([\![0\ ;\ 3]\!]\Big)$:
   $$E(2^X) = 2^0 \times \frac{1}{4} + 2^1 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 2^3 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 = 3,75$$

   (d) Qu'appelle-t-on une variable aléatoire centrée ?
   Réponse attendue : C'est une variable aléatoire dont l'espérance vaut 0.

   (e) Donner la définition de la variance et de l'écart-type d'une variable aléatoire X.
   Réponse attendue :
   $$V(X) = E\bigg(\Big(X - E(X)\Big)^2\bigg).$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

(f) Donner les trois propriétés de la variance vue en cours :
Réponse attendue :
  i. Si $V(X) = 0$ alors X est une variable aléatoire certaine.
  ii. $V(aX + b) = a^2 V(X)$.
  iii. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (Formule de Koenig-Huygens)

(g) Qu'appelle-t-on une variable réduite ? Une variable centrée réduite ? Qu'appelle-t-on la variable centrée-réduite associée à une variable aléatoire X ?
Réponse attendue :
- On dit que X est réduite si $V(X) = 1$.
- On dit que X est centrée-réduite si $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.
- On appelle **variable centrée réduite associée à** X, la variable $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$.

3. Lois usuelles

(a) Loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$.
- Décrire la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$.
Réponse attendue : On dit que X suit la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$ (et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![a\ ;\ b]\!]\big)$) si :
$$X(\Omega) = [\![a, b]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![a, b]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{b - a + 1}.$$
- Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![1\ ;\ n]\!]\big)$. Donner $E(X)$ et $V(X)$.
Réponse attendue :
$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

(b) Loi de Bernoulli
- Décrire la loi de Bernoulli.
Réponse attendue : On dit que la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p (et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$) si :
$$X(\Omega) = \{0, 1\} \text{ avec } P(X = 0) = 1 - p \text{ et } P(X = 1) = p.$$
- Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Donner $E(X)$ et $V(X)$.
Réponse attendue :
$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1 - p)$$

(c) Loi Binomiale
- Décrire la Binomiale. Expliquer dans quelle situation elle se présente.
Réponse attendue : On dit que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p (et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$) si :
$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$
Si on répète n fois, de façon indépendante, la même expérience et que l'on note X le nombre d'apparitions d'un certain évènement A lors de ces n répétitions. Si on pose $P(A) = p$, alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.
- Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Donner $E(X)$ et $V(X)$.
Réponse attendue :
$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1 - p)$$