Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ avec $n \geq 2$.

On va calculer $E(X(X-1))$.

On en déduira $E(X^2)$ puis $V(X)$.

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\, P(X=k)$$ (Formule du transfert).

$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\, P(X=k)$$ (car pour $k=0$ et $k=1$, $k(k-1)$ est nul)

$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Or $\forall k \in [\![2,n]\!]$, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k} \times \frac{n-1}{k-1}\binom{n-2}{k-2}$ comité président appliquée 2 fois.

Donc $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$

D'où

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k}$$

On pose $k' = k-2$
Donc $k = k'+2$

$$= n(n-1) \sum_{k'=0}^{n-2} \binom{n-2}{k'} p^{k'+2} (1-p)^{n-(k'+2)}$$

$$= n(n-1) \times p^2 \sum_{k'=0}^{n-2} \binom{n-2}{k'} p^{k'} (1-p)^{n-2-k'}$$ Binôme de Newton

$$= n(n-1)\, p^2 \,(p+1-p)^{n-2}$$

$$= n(n-1)\, p^2$$

Donc $E\big(X(X-1)\big) = n(n-1)\, p^2.$

$$\iff E(X^2 - X) = n(n-1)\, p^2$$

$$\iff E(X^2) - E(X) = n(n-1)\, p^2$$

$$\iff E(X^2) = n(n-1)\, p^2 + E(X).$$

D'où :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= n(n-1)\, p^2 + np - (np)^2$$

$$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$$

$$= -np^2 + np$$

$$= np(1-p)$$

On a bien $\boxed{V(X) = np(1-p)}$