Exercices de colle.

Exercice de Colle 1

On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par

$$P(X=2)=\frac{1}{4},\ P(X=3)=\frac{1}{4} \text{ et } P(X=4)=\frac{1}{2}$$

On pose $Y=\frac{1}{X}$. Calculer l'espérance de Y.

Exercice de Colle 2

On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par

$$P(X=1)=\frac{1}{3},\ P(X=4)=\frac{1}{3} \text{ et } P(X=9)=\frac{1}{3}$$

On pose $Z=\sqrt{X}$. Calculer l'espérance de Z.

Exercice de Colle 3

Une urne contient 2 boules blanches et 8 noires. Un joueur tire successivement et sans remise 5 boules.
On note X (resp. Y) le nombre de boules blanches (resp. noires) obtenues.

1. Déterminer la loi de X et son espérance et sa variance.
2. Trouver une relation liant X et Y. En déduire l'espérance et la variance de Y.
3. Déterminer la loi de Y.
4. *Bonus : que deviennent ces résultats lorsque les tirages se font avec remise ?*

Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement et sans remise 5 boules.
Soit B (resp. N) la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches (resp. noires) obtenues.
a) Déterminer la loi de B puis calculer $E(B)$.
b)Trouver une relation liant B et N. En déduire la loi de N ainsi que son espérance.
bonus : que deviennent ces résultats lorsque les tirages se font avec remise?

Exercice de Colle 4

Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une seule couleur dans l'urne. Soit X le nombre de tirages nécessaires.
Expliciter la loi de X et son espérance.

Exercice de Colle 5

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et à valeurs dans $[\![1,10]\!]$ dont la loi vérifie : $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall k \in X(\Omega), P(X=k)=\alpha \times k$.

1. Calculer α.
2. Déterminer l'espérance et la variance de X. *On pourra utiliser la formule :* $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$.
3. Déterminer la loi, l'espérance puis la variance de $Y=X+1$.

Exercice de Colle 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n boîtes B_1, ..., B_n. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la boîte B_k contient k jetons numérotés de 1 à k. On choisit au hasard une boîte puis on tire un jeton. On note X la variable égale au numéro du jeton obtenu. Déterminer la loi de X. (*on pourra commencer par déterminer* $P(X=1)$ ...)

Exercice de Colle 7

Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise de cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche, Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne et Z le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi de X et son espérance.
2. Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$.
3. Trouver un lien entre Z et X, et en déduire sans calcul la loi de Z.

Exercice de Colle 8

Un cycliste rencontre 5 feux de circulation sur le boulevard de Strasbourg. La probabilité qu'un feu soit vert est de $1/2$, et ce indépendamment des autres feux. On note X le nombre de feux verts pour le cycliste. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice de Colle 9

Une étude statistique a permis de déterminer que 10% de la population est gauchère.
Calculer la probabilité qu'un groupe de 8 personnes contienne :

(a) un seul gaucher

(b) au moins 2 gauchers

on pourra introduire une variable aléatoire X judicieuse ...

Exercice de Colle 10

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Les résultats de X sont censés être affichés par un compteur mais celui-ci est détraqué : lorsque X prend une valeur non nulle, le compteur affiche la bonne valeur de X, mais lorsque X prend la valeur 0, le compteur affiche un entier au hasard entre 1 et n.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre affiché par le compteur.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Montrer que $E(Y) \geq E(X)$. Aurait-on pu deviner ce résultat ?

Exercice de Colle 11

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, $n \in \mathbb{N}^*$, et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
Montrer que $E(X) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} P(X > k)$

Indication : commencer par exprimer $P(X = k)$ en fonction de $P(X > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ puis revenir à la définition de l'espérance.

Exercice de Colle 12

Soient λ un réel strictement positif, en entier $n \geq 1$ et X une variable aléatoire dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ P(X = k) = \lambda k^2.$$

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Soit $Y = 1/X$. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y.

Exercice de Colle 13

Une urne contient n boules blanches et $2n$ boules rouges (avec $n \geq 3$).

1. On effectue des tirages dans l'urne avec remise jusqu'à obtenir une boule blanche ou 3 boules rouges successivement. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages.
   Déterminer la loi de X et l'espérance de X.
2. On effectue maintenant les tirages sans remise. Donner dans ce cas la loi et l'espérance de X.