DM n° 10 - Urne de Polya

Soient r, b et d des entiers strictement positifs. Une urne contient b boules bleues et r boules rouges, toutes indiscernables au toucher. Une boule est choisie au hasard dans l'urne. On note sa couleur et on la remet dans l'urne en ajoutant d boules supplémentaires de la même couleur. Par exemple, si la première boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne avec d boules rouges supplémentaires (l'urne contient alors $r+d$ boules rouges et b boules bleues). Puis on recommence cette procédure autant de fois que nécessaire. On note :

- R_n (resp. B_n) l'évènement "la n-ième boule tirée est rouge (resp. blanche).
- X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges dans l'urne après n tirages.
- Y_n la variable aléatoire égale à 1 si la n-ième boule tirée est rouge et à 0 sinon.

Partie 1 - Loi de X_n dans le cas $b = r = d = 1$

Dans cette partie, on prend $b = r = d = 1$. L'urne contient donc initialement 2 boules : une bleue et une rouge. Et à chaque fois qu'on tire une boule on la remet dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur.

1. Donner la loi de X_1 et de X_2.
2. On va démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}\Big([\![1\ ;\ n+1]\!]\Big)$.
   (a) Vérifier que cette propriété est bien vraie au rang 1.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}\Big([\![1\ ;\ n+1]\!]\Big)$. On va montrer que $X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{U}\Big([\![1\ ;\ n+2]\!]\Big)$.
   Soit $k \in [\![1, n+2]\!]$.
      i. Soit $i \in [\![1, n+1]\!]$. Calculer $P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = k)$ dans les trois cas suivants :
         A. Si $i = k$.
         B. Si $i = k - 1$
         C. Si $i \neq k$ et $i \neq k - 1$.
      ii. En déduire, à l'aide la formule des probabilités totales, $P(X_{n+1} = k)$.

Partie 2 - loi de Y_n dans le cas général.

On considère maintenant b, r et d quelconques, strictement positifs.

1. (a) Donner la loi de Y_1.
   (b) Donner la loi de Y_2.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note S_n le nombre de boules rouges tirées lors des n premiers tirages.
   (a) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $P_{[S_n=k]}(Y_{n+1} = 1)$.
   (b) En déduire que $P(Y_{n+1} = 1) = \dfrac{r + dE(S_n)}{r + b + dn}$.
   (c) Exprimer $E(S_{n+1})$ en fonction de $E(S_n)$ et de $P(Y_{n+1} = 1)$.
3. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P(Y_{n+2} = 1) = P(Y_{n+1} = 1)$.
4. Donner alors la loi de Y_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie 3 - Simulation.

Écrire une fonction Scilab Y=polya(r,b,d,n) qui simule n tirages dans une urne de Polya et renvoie une matrice ligne Y de n éléments. Le k-ième élément de Y valant 1 si la k-ième boule tirée est rouge et 0 sinon.