DM08 - Correction

1) (a) $W_0 = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^0 \, dt = \int_0^{\pi/2} 1 \, dt = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$ 1

$W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = \Big[\sin t\Big]_0^{\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0 = 1.$ 1

Donc : $\boxed{W_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } W_1 = 1.}$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1} - (\cos t)^n \, dt \quad \text{par linéarité.}$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n (\cos t - 1) \, dt$$

Or pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$

donc $(\cos t)^n \geqslant 0$ et $1 - \cos t \leqslant 0.$

d'où $(\cos t)^n (1 - \cos t) \leqslant 0$

Donc, en intégrant sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n (1 - \cos t) \, dt \leqslant 0$$

$\boxed{\text{Donc la suite } (W_n) \text{ est bien décroissante.}}$ 2

1

(c) Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$ donc $(\cos t)^n \geqslant 0$

Donc, en intégrant sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \geqslant 0$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \ W_n \geqslant 0$

Supposons que $W_n = 0$. Comme $t \mapsto \cos^n(t)$ est positive sur $\left[0, \pi/2\right]$, alors cela implique que cette fonction est nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: absurde ! (elle n'est nulle qu'en $\frac{\pi}{2}$ sur cet intervalle).

Donc $\boxed{W_n > 0}$

Remarque : On a utilisé ici la proposition suivante du cours :

Si $\begin{cases} \int_a^b f(t)\, dt = 0 \\ \underline{\underline{\text{et}}} \\ f \text{ est positive sur } [a, b] \end{cases}$ alors f est nulle sur $[a, b]$.

(d) On pose $\varphi(t) = \frac{\pi}{2} - t$.

- $\varphi \in \mathcal{C}^1([0, \frac{\pi}{2}])$ donc le changement de variable $u = \varphi(t)$ est licite.
- $du = \varphi'(t)\,dt$ donc $du = -dt$ donc $dt = -du$
- $t = 0 \longrightarrow u = \frac{\pi}{2}$

  $t = \frac{\pi}{2} \longrightarrow u = 0$.

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n\,dt = \int_{\pi/2}^{0} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)^n (-du)$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin u)^n\,du$$

car $\int_a^b f(t)(-dt) = \int_b^a f(t)\,dt$.
et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin u$

$$\boxed{\text{On a donc bien : } \forall n \in \mathbb{N},\ W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,dt}$$

2

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $W_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos t \times (\cos t)^{n+1} \, dt$.

On pose $u(t) = (\cos t)^{n+1}$ et $v'(t) = \cos t$

On a : $u'(t) = -(n+1) \sin t \, (\cos t)^n$ et $v(t) = \sin t$.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc on peut intégrer par partie.

$$W_{n+2} = \Big[\sin t \, (\cos t)^{n+1}\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -(n+1) \sin t \, (\cos t)^n \times \sin t \, dt$$

$$= 0 + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, \cos^n t \, dt$$

$$= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \cos^n t \, dt$$

$$= (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^n t - \cos^{n+2} t \, dt = (n+1) W_n - (n+1) W_{n+2}.$$

On a donc $W_{n+2} = (n+1) W_n - (n+1) W_{n+2}$

$$\iff W_{n+2} + (n+1) W_{n+2} = (n+1) W_{n+1}$$

On a donc bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n}$

4

(b) Montrons ce résultat par récurrence :

Initialisation ($n=0$) :

$$W_{2\times 0} = W_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \frac{(2\times 0)!}{(2^0 \times 0!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{0!}{1\times 0!} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

On a donc bien $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^n \times n!} \times \dfrac{\pi}{2}$ pour $n=0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

Montrons que $W_{2(n+1)} = \dfrac{(2(n+1))!}{(2^{n+1} \times (n+1)!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.

$$W_{2(n+1)} = W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} \quad \text{(d'après la question 2a)}$$

$$= \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \quad \text{(par HdR).}$$

$$= \frac{(2n+1)!}{(2n+2) \times (2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2n+2) \times (2n+1)!}{(2n+2)^2 \times (2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2n+2)!}{(2(n+1) \times 2^n \times n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2n+2)!}{2^{n+1} \times (n+1)!} \times \frac{\pi}{2}$$

3

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Donc, par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}}$

(c) On va montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$ est constante.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$

$= (n+1)W_n W_{n+1}$ } d'après la question 2a

$= (n+2)W_{n+2}W_{n+1}$

$= u_{n+1}$

Donc (u_n) est constante.

Or $u_0 = 1 \times W_1 \times W_0 = \frac{\pi}{2}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{\pi}{2}$.

D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}.}$

2

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question 2c, $(2n+1)W_{2n+1}W_{2n} = \frac{\pi}{2}$

$$\iff W_{2n+1} = \frac{\pi/2}{(2n+1)W_{2n}}$$

$$\iff W_{2n+1} = \frac{\pi/2}{2n+1} \times \frac{(2^n \times n!)^2}{(2n)! \times \pi/2}$$

$$\iff W_{2n+1} = \frac{(2^n \times n!)^2}{(2n+1)!}$$

D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n+1} = \frac{(2^n \times n!)^2}{(2n+1)!}}$

2

(3) (10 pts)

(a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n} = 1$

$\boxed{\text{On a } \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1 \text{, c'est-à-dire } n+1 \sim n}$

1

(b) On a, d'après la question 2.a,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{W_{n+2}}{W_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n} = 1$$

$\boxed{\text{Donc } \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{W_{n+2}}{W_n} = 1}$

1

(c) (W_n) est décroissante donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$$

car $W_{n+2} > 0$ et par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$.

$$\iff \frac{1}{W_n} \leqslant \frac{1}{W_{n+1}} \leqslant \frac{1}{W_{n+2}}$$

$\times W_n > 0$

$$\iff 1 \leqslant \frac{W_n}{W_{n+1}} \leqslant \frac{W_n}{W_{n+2}}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{W_n}{W_{n+2}} = 1$ donc, par encadrement :

$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{W_n}{W_{n+1}} = 1 \text{, c'est-à-dire } W_{n+1} \sim W_n}$

3

(d) • $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n w_n}{v_n w_n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ car $u_n \sim v_n$

donc $\boxed{u_n w_n \sim v_n w_n}$

• $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\frac{u_n}{w_n}}{\frac{v_n}{w_n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ car $u_n \sim v_n$ 1

donc $\boxed{\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{w_n}}$

• $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\frac{w_n}{u_n}}{\frac{w_n}{v_n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = 1$ car $u_n \sim v_n$

donc $\boxed{\dfrac{w_n}{u_n} \sim \dfrac{w_n}{v_n}}$

(e) Soient (u_n), (v_n) et (w_n) des suites telles que $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$.

Alors, $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \times 1 = 1$

Donc $\boxed{u_n \sim w_n}$ Q5

(f) On a $W_n \sim W_{n+1}$

Donc $W_n W_n \sim W_n W_{n+1}$

$\iff (W_n)^2 \sim W_n W_{n+1}$

Or $W_n W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)} \sim \dfrac{\pi}{2n}$ car $n+1 \sim n$ 2

D'où : $\boxed{(W_n)^2 \sim \dfrac{\pi}{2n}}$

(g) Soient (u_n) et (v_n) des suites positives telles que $u_n \sim v_n$

alors $\dfrac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{v_n}} = \sqrt{\dfrac{u_n}{v_n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{1} = 1$ 0,5

Dmc $\boxed{\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}}$

(h) On a $(W_n)^2 \sim \dfrac{\pi}{2n}$

Dmc $\sqrt{(W_n)^2} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

$\iff \boxed{W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}}$ 1

(4) 2

DM08-programme.sce

```
function W=suiteW(N)
    W=%pi/2
    for n=1:N
        W=%pi/(2*W*n)
    end
endfunction
```