

# Programme de colle n° 17

## Semaine du 01/03/2021

### Variables Aléatoires sur un Univers fini

Tout le cours sur les variables aléatoires finies doit être su

## Exercices préparés groupe A

Ces exercices doivent être réalisés sans la moindre hésitation, en moins de 10 minutes.

### Exercice préparé n° 1 (C'est l'exercice 17 FE 14)

Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  et à valeurs dans  $[1, 10]$  dont la loi vérifie :  $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall k \in X(\Omega), P(X = k) = \alpha \times k$ .

1. Calculer  $\alpha$ .
2. Déterminer l'espérance et la variance de  $X$ . On pourra utiliser la formule :  $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ .
3. Déterminer la loi, l'espérance puis la variance de  $Y = X + 1$ .

### Exercice préparé n° 2 (C'est l'exercice 18 FE 14)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On dispose de  $n$  boîtes  $B_1, \dots, B_n$ . Pour tout  $k \in [1, n]$ , la boîte  $B_k$  contient  $k$  jetons numérotés de 1 à  $k$ . On choisit au hasard une boîte puis on tire un jeton. On note  $X$  la variable égale au numéro du jeton obtenu. Déterminer la loi de  $X$ . (on pourra commencer par déterminer  $P(X = 1)$  ...)

### Exercice préparé n° 3 (C'est l'exercice 19 FE 14)

Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ . Les résultats de  $X$  sont censés être affichés par un compteur mais celui-ci est détraqué : lorsque  $X$  prend une valeur non nulle, le compteur affiche la bonne valeur de  $X$ , mais lorsque  $X$  prend la valeur 0, le compteur affiche un entier au hasard entre 1 et  $n$ .

On note  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre affiché par le compteur.

1. Déterminer la loi de  $Y$ .
2. Montrer que  $E(Y) \geq E(X)$ . Aurait-on pu deviner ce résultat ?

***Voir les exercices préparés du groupe A' à la page suivante.***

## Exercices préparés groupe A'

Ces exercices doivent être réalisés sans la moindre hésitation, en moins de 10 minutes. Membres du groupe A' :

- Yusef
- Hafsa
- Ismail
- Dan
- Lina
- Cédric
- Mylanh
- Maxime
- Yacine
- Anis

### Exercice préparé n° 1 (C'est l'exercice 18 FE 14)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On dispose de  $n$  boîtes  $B_1, \dots, B_n$ . Pour tout  $k \in [1, n]$ , la boîte  $B_k$  contient  $k$  jetons numérotés de 1 à  $k$ . On choisit au hasard une boîte puis on tire un jeton. On note  $X$  la variable égale au numéro du jeton obtenu. Déterminer la loi de  $X$ . (on pourra commencer par déterminer  $P(X = 1)$  ...)

### Exercice préparé n° 2

Donner et démontrer la formule de l'espérance de la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ .  
([Voir la démonstration ici](#))

### Exercice préparé n° 3 (C'est le début de l'exercice 20 FE 14)

Une urne contient 2 boules blanches et  $n - 2$  boules rouges. On effectue des tirages sans remise de cette urne. On appelle  $X$  le rang de sortie de la première boule blanche,  $Y$  le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne et  $Z$  le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi de  $X$  et son espérance.
2. Exprimer  $Y$  en fonction de  $X$  et calculer  $E(Y)$ .