Feuille d'exercices n°15 - Espaces Vectoriels

Exercice 1 .
Les ensembles ci-dessous sont-ils des espaces vectoriels ?
1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0\}$
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 1\}$
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y - 2z = 1\}$
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 2z = 0 \text{ et } 3x - y + z = 0\}$
5. $E_5 = \{(x + y, 2y - x, 3x + y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
6. $E_6 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 4u_n\}$
7. $E_7 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(2) = 0\}$
8. $E_8 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tous les coefficients de } M \text{ sont égaux}\}$
9. $E_9 = \left\{\begin{pmatrix} x+y & x-y \\ 2x+y & 3x \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$
10. $E_{10} = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(X + 1) = P(X)\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 2 .
Utiliser la méthode 2 ou la méthode 3 pour démontrer que les ensembles E_1, E_4, E_8, E_9 et E_{10} sont des espaces vectoriels et en déterminer une famille génératrice.

Exercice 3 . Commutant d'une matrice (classique)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note E l'ensemble des matrices M qui commutent avec A (c'est-à-dire telles que $AM = MA$). Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4 .
1. Montrer que $\big((1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\big)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $(X + 1, X + 2, X + 3)$ est génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 5 .
1. Montrer que $\big((1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\big)$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.
2. Avec la question 1 de l'exercice 4, que peut-on en déduire pour cette famille ?

Exercice 6 . Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ?
1. $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1)$;
2. $u_1 = (0,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (1,1,1)$;
3. $u_1 = (0,1,-1)$, $u_2 = (1,0,-1)$, $u_3 = (1,-1,0)$;
4. $u_1 = (1,1,-1)$, $u_2 = (1,-1,1)$, $u_3 = (-1,1,1)$, $u_4 = (1,1,1)$.

Exercice 7 . Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base.
1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$;
2. $F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z - t = 0, x + 2y + 3z + 4t = 0\}$;
3. $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = 3z\}$;
4. $F_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = y + z = z + t = t + x = 0\}$;
5. $F_5 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(2) = 0\}$
6. $F_6 = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid {}^tM = -M\}$

Exercice 8 .
1. Montrer que $\big((1,0,1), (2,1,0), (1,1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le vecteur u_0 qui a pour coordonnées $(-5,-3,-1)$ dans cette base.
3. Déterminer les coordonnées de $u_1 = (-5,-3,-1)$ dans cette base.

Exercice 9 . On pose : $F_1 = \{(a, b, c, d) \mid 3a - 4c + d = 0\}$
1. On pose $x = (1,2,3,4)$ est-ce que $x \in F_1$?
2. Donner deux éléments de F_1
3. Démontrer que F_1 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 10 . On pose $F_2 = \{(3t+s, -s, s+t),\ x,t \in \mathbb{R}\}$
1. Donner un élément de F_2 et un élément de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas dans F_2.
2. Démontrer que F_2 est un sev de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11 . On pose $u_1 = (1,-2,1)$ et $u_2 = (0,1,2)$
1. Soit $v = (1,2,3)$. A-t-on $v \in Vect(u_1, u_2)$?
2. Déterminer $k \in \mathbb{R}$ tel que $(2k+1, k, -k) \in Vect(u_1, u_2)$.
3. On pose $a = (-1,4,2)$ et $b = (1,0,5)$. Montrer que $Vect(u_1, u_2) = Vect(a, b)$.

Exercice 12 . On pose $P = X^2$, $Q = 2X + 1$ et $R = 4X$.
1. Montrer que $3X^2 + 2X - 1 \in Vect(P, Q, R)$
2.
   a. Prouver que $Vect(1, X, X^2) \subset Vect(P, Q, R)$.
   b. Que représente $Vect(1, X, X^2)$?

Exercice 13 . On pose $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \sin x$.
1. Donner 3 éléments de de $Vect(f, g)$.
2. Démontrer que $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \in Vect(f, g)$.
3. Démontrer que (f, g) est libre.
4. Soit F l'ensemble des fonctions h définies sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivables telles que $h'' + h = 0$.
   Démontrer que F est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et que $Vect\ (f, g) \subset F$.

Exercice 14 .
On considère dans $\mathbb{R}^3$: $u_1 = (1,0,1)$ $u_2 = (0,1,0)$ $u_3 = (1,1,0)$ et $u_4 = (3,0,2)$.
1. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants :
   $$E_1 = Vect(u_1, u_2, u_4)\ ;\ E_2 = Vect(u_1, u_2, u_3)\ ;\ E_3 = Vect(u_3, u_4)\ ;\ E_4 = Vect(u_1)$$
2. Déterminer un système d'équations linéaire définissant E_1, puis E_3.
   Vérifier en particulier que les vecteurs définissant E_1 et E_3 vérifient bien ces équations.
3. Déterminer une base de $E_5 = E_1 \cap E_3$.

Exercice 15 .
On note T_n^+ (resp. S_n,resp. A_n) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. Symétriques, resp. Antisymétriques) d'ordre n où $n \in \mathbb{N}^*$, à coefficients réels.
1. Démontrer que ces 3 ensembles sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
2. Déterminer une base de chacun de ces espaces.

Exercice 16 .
On pose $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), MK = KM = M\}$
1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   a. Montrer que $M \in E$ ssi $k = g = c = a$, $h = b$ et $f = d$. En déduire alors la forme des matrices de E et en déterminer une base.
   b. Montrer par un argument simple que les matrice de E ne sont pas inversibles.
3. On considère l'ensemble F des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$, où a, b, c sont des réels.
   Montrer que F est un sev de E et en donner une base.

Exercice 17 . Les ensembles décrits ci-dessous sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ? Justifier.
1. $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq 1\}$.
2. L'ensemble A des suites arithmétiques.
3. L'ensemble G des suites géométriques.
4. L'ensemble F des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et croissantes.

Exercice 18 . Soient les polynômes :

$$P(X) = X, \qquad Q(X) = X - 1 \text{ et } R(X) = 3X^2$$

1. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, la famille (P, Q, R) est-elle libre, génératrice, une base? Et vue comme une famille de vecteurs de $\mathbb{R}_3[X]$?

2. Donner les coordonnées de $S(X) = 6X^2 - X + 1$ dans la base (P, Q, R).

Exercice 19 . Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(X^3) = (X^4 + X^2 + 1)P(X)\}$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer que F admet une base que l'on déterminera. *On commencera par résoudre l'équation $P(X^3) = (X^4 + X^2 + 1)P(X)$, d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$, par analyse-synthèse.*

Exercice 20 . (Ecricome 2014 – voie S)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe deux polynômes P et Q appartenant à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = xP(x) + x\ln(x)\,Q(x)$$

1. Prouver que E est un $\mathbb{R} -$ espace vectoriel.

2. Pour tout entier $k \in \{1, \ \dots, n\}$, on pose :

$$u_k : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{cases} \text{ et } \quad v_k : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \ln(x) \end{cases}$$

Prouver que $E = Vect(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$