DM07 - Correction

2. a. La probabilité que la personne soit malade est égale à la proportion de personnes malades dans la population.

$$\boxed{P(M) = p}$$

0,5 pt

b. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) \\ &= P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) \\ &= p \times 0{,}99 + (1-p) \times 0{,}01 \\ &= \boxed{0{,}98p + 0{,}01}. \end{aligned}$$

2 pts

3. On cherche $P_T(M)$

$$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{P(M) \times P_M(T)}{P(T)} = \frac{p \times 0{,}99}{0{,}98p + 0{,}01}.$$

1,5 pts

$$\boxed{P_T(M) = \frac{0{,}99p}{0{,}98p + 0{,}01}}$$

4. On cherche la plus petite valeur de p telle que $P_T(M) \geqslant 0,95$.

$$P_T(M) \geqslant 0,95$$

$$\iff \frac{0,99p}{0,98p + 0,01} \geqslant 0,95$$

$$\iff 0,99p \geqslant 0,931p + 0,0095$$

$$\iff 0,059p \geqslant 0,0095$$

$$\iff p \geqslant \frac{95}{590}$$

$$\iff p \geqslant \frac{19}{118}$$

$\boxed{\text{Donc on aura } P_T(M) \geqslant 0,95 \text{ pour } p \geqslant \frac{19}{118}.}$

2 pts

5. $P_E(M) = P_{T_1 \cap T_2}(M)$
$$= \frac{P(T_1 \cap T_2 \cap M)}{P(T_1 \cap T_2)}$$

Or $P(T_1 \cap T_2 \cap M) = P(M \cap T_1 \cap T_2)$
$$= P(M) \times P_M(T_1 \cap T_2)$$

4pts

Les 2 tests sont indépendants signifie que T_1 et T_2 sont indépendants pour les probabilités P_M et $P_{\overline{M}}$

Donc $P_M(T_1 \cap T_2) = P_M(T_1) \times P_M(T_2) = 0{,}99^2$.

Donc :

$$\boxed{P(T_1 \cap T_2 \cap M) = 0{,}01 \times 0{,}99^2.}$$

De plus :

$$P(T_1 \cap T_2) = P(M \cap T_1 \cap T_2) + P(\overline{M} \cap T_1 \cap T_2)$$
$$= 0{,}01 \times 0{,}99^2 + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T_1 \cap T_2)$$
$$= 0{,}01 \times 0{,}99^2 + 0{,}99 \times P_{\overline{M}}(T_1) \times P_{\overline{M}}(T_2)$$
$$= 0{,}01 \times 0{,}99^2 + 0{,}99 \times 0{,}01^2$$
$$= 0{,}01 \times 0{,}99\,(0{,}99 + 0{,}01)$$
$$= \boxed{0{,}01 \times 0{,}99}$$

D'où $P_E(M) = \dfrac{0{,}01 \times 0{,}99^2}{0{,}01 \times 0{,}99} = 0{,}99.$

De plus $P_{\overline{M}}(T_1 \cap T_2) = P_{\overline{M}}(T_1) \times P_{\overline{M}}(T_2) = 0{,}01^2$

On a donc :

$$\boxed{P_E(M) = 0{,}99 \text{ et } P_{\overline{M}}(E) = 0{,}0001.}$$

Ainsi, si les 2 tests sont positifs, on a une très forte probabilité d'être malade et réciproquement, si on n'est pas malade, on a très peu de chance que les 2 tests soient positifs.

Remarque : avec un seul test et $p = 0{,}01$, $P_T(M) = \dfrac{0{,}99 \times 0{,}01}{0{,}98 \times 0{,}01 + 0{,}01}$

$$= \frac{0{,}99}{1{,}98}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Ainsi avec un seul test, on n'a qu'une chance sur 2 d'être malade lorsque le test est positif (sans autre information).