Exercice 1 /30

1.(a) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, $\dfrac{a}{x} - \dfrac{b}{x+1} = \dfrac{(a-b)x + a}{x(x+1)}$

On doit donc avoir $a - b = 0$ et $a = 1$

1 C'est-à-dire $\boxed{a = b = 1}$.

D'où : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\},\ \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}}$.

(b) $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\, dx$

$$= \Big[\ln|x| - \ln|x+1|\Big]_1^2$$

2

$$= \ln 2 - \ln 3 - (\ln 1 - \ln 2)$$

$$= 2\ln 2 - \ln 3$$

$$= \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

Donc $\boxed{I_1 = \ln\left(\frac{4}{3}\right)}$

2.(a) Soit $n \geqslant 2$.

Pour tout $x \in [1, 2]$, $\dfrac{1}{1+x} \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $0 \leqslant \dfrac{1}{x^n(x+1)} \leqslant \dfrac{1}{2x^n}$

D'où, en intégrant sur $[1, 2]$:

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_1^2 \frac{1}{2x^n}\, dx$$

3

Or $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2x^n}\, dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x^n}\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{(n-1)2^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)2^{n-1}}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{n-1}.$$

On a donc bien : $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2(n-1)}}$

6

b. On a, $\forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2(n-1)}$

1 Or $\frac{1}{2(n-1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc, par encadrement : $I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

On a donc : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0}$

3 3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$I_n + I_{n+1} = \int_1^2 \frac{1}{x^n(x+1)} + \frac{1}{x^{n+1}(x+1)}\, dx \quad \text{par linéarité}$$

$$= \int_1^2 \frac{\cancel{x+1}}{x^{n+1}\cancel{(x+1)}}\, dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\, dx = \left[\frac{-1}{n\ x^n}\right]_1^2 dx = -\frac{1}{n \times 2^n} + \frac{1}{n}$$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}$

2 (b) <u>Méthode 1 :</u>

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

Pour tout $x \in [1,2]$, on a $x \geqslant 1$ donc $x^{n+1} \geqslant x^n$

donc $\frac{1}{x^{n+1}(x+1)} \leqslant \frac{1}{x^n(x+1)}$

Donc, en intégrant sur $[1,2]$: $I_{n+1} \leqslant I_n$

Donc $\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ est décroissante}}$.

Méthode 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}(x+1)} - \frac{1}{x^n(x+1)}\,dx \quad \text{par linéarité}$$

$$= \int_1^2 \frac{1-x}{x^{n+1}(x+1)}\,dx$$

Pour tout $x \in [1,2]$, on a $\frac{1-x}{x^{n+1}(x+1)} \leqslant 0$

Donc, en intégrant sur $[1,2]$: $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$

Donc $\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ est décroissante}}$.

4 (c) On veut montrer que $\frac{I_n}{\frac{1}{2n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

C'est-à-dire que $2n I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

Or (I_n) est décroissante, donc, pour tout $n \geqslant 2$:

$$I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant I_{n-1}$$

$$\Longleftrightarrow I_n + I_{n+1} \leqslant 2 I_n \leqslant I_{n-1} + I_n$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leqslant 2 I_n \leqslant \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$\Longleftrightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \leqslant 2n I_n \leqslant \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n-1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{2^n} = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{2^{n-1}} = 1$.

Donc, par encadrement : $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n I_n = 1$

On a donc bien $\boxed{I_n \sim \frac{1}{2n}}$

1 4. (a) $J_0 = \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2} = \left[\frac{-1}{x+1}\right]_1^2 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$$\boxed{J_0 = \frac{1}{6}}$$

2 (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$J_k + J_{k-1} = \int_1^2 \frac{1}{x^k(x+1)^2} + \frac{1}{x^{k-1}(x+1)^2}\,dx \quad \text{par linéarité}$$

$$= \int_1^2 \frac{\cancel{1+x}}{x^k(x+1)^{\cancel{2}}}\,dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x^k(1+x)}\,dx = I_k.$$

On a donc : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ J_k + J_{k-1} = I_k}$

4 (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(J_k + J_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} J_k + (-1)^{k-1} J_{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} -(-1)^{k} J_k + (-1)^{k-1} J_{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} J_{k-1} - (-1)^k J_k$$

$$= (-1)^0 J_0 - (-1)^n J_n = \frac{1}{6} - (-1)^n J_n.$$

On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = \frac{1}{6} - (-1)^n J_n}$

23

(d) Soit $n \geqslant 2$.

Pour tout $x \in [1,2]$, $\dfrac{1}{1+x} \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{(1+x)^2} \leqslant \dfrac{1}{4}$

donc $0 \leqslant \dfrac{1}{x^n(x+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{4x^n}$

D'où, en intégrant sur $[1,2]$:

$$0 \leqslant J_n \leqslant \int_1^2 \frac{1}{4x^n}\,dx$$

Or $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{4x^n}\,dx = \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)2^{n-1}}\right)$ (déjà calculé à la question 2.a)

$\leqslant \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{n-1}$.

3 On a donc bien : $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ 0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{4(n-1)}}$

1 Or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4(n-1)} = 0$ donc, par encadrement, $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} J_n = 0}$

(e) On a vu que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k = \frac{1}{6} - (-1)^n J_n$

1 Or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} J_n = 0$

Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k I_k = \frac{1}{6}}$

5. n = input("entrer une valeur de n supérieure ou égale à 2") \\

$I = Log(4/3)$; $J = \frac{1}{6}$; $J = I - J$ \\ (On calcule J_1 à l'aide de $J_k = I_k - I_{k-1}$

for k = 2 : n \\

2

$I = \frac{1}{k-1}\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) - I$) On a $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ Donc $I_k = \frac{1}{k-1}\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right) - I_k$

$J = I - J$) $J_k = I_k - J_{k-1}$

end

disp("la valeur de I est", I)) Avec Scilab 6.1, on voit les valeurs après

disp("la valeur de J est", J)) le message.

Exercice 2 - groupe A

1. $R_0 = \int_0^2 \frac{(2-t)^0}{0!} e^t dt = \int_0^2 e^t dt = \left[e^t\right]_0^2 = e^2 - 1$ donc $\boxed{R_0 = e^2 - 1}$

$R_1 = \int_0^2 \frac{(2-t)^1}{1!} e^t dt = \int_0^2 (2-t)e^t dt$

Intégration par partie avec :
$u = 2-t$ et $v' = e^t$
$u' = -1$ $\quad v = e^t$

$= \left[(2-t)\, e^t\right]_0^2 - \int_0^2 -e^t dt$

$= 2 + R_0 = e^2 + 1.$ donc $\boxed{R_1 = e^2 + 1}$

$R_2 = \int_0^2 \frac{(2-t)^2}{2} e^t dt$

Intégration par partie avec :
$u = \frac{(2-t)^2}{2} = \frac{1}{2} \times (2-t)^2$ et $v' = e^t$
$u' = \frac{1}{2} \times 2 \times (-1) \times (2-t) = -(2-t)$ $\quad v = e^t$

$= \left[\frac{(2-t)^2}{2} e^t\right]_0^2 - \int_0^2 -(2-t)\, e^t dt$

$= 2 + R_1 = e^2 + 3$ donc $\boxed{R_2 = e^2 + 3}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $t \in [0,2]$, $0 \leqslant 2-t \leqslant 2$

car $x \longmapsto x^n$ est $\nearrow$ sur $[0,+\infty[$

donc $0 \leqslant (2-t)^n \leqslant 2^n$

$\times \frac{e^t}{n!}$ avec $\frac{e^t}{n!} > 0$.

donc $0 \leqslant \frac{(2-t)^n}{n!} e^t \leqslant \frac{2^n}{n!} \times e^t$

Donc, en intégrant sur $[0,2]$:

$$0 \leqslant R_n \leqslant \int_0^2 \frac{2^n}{n!} e^t dt$$

$$\iff 0 \leqslant R_n \leqslant \frac{2^n}{n!} \int_0^2 e^t dt$$

$$\iff 0 \leqslant R_n \leqslant \frac{2^n}{n!} R_0 \quad \text{avec } R_0 = e^2 - 1$$

On a donc bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant R_n \leqslant \frac{2^n}{n!}\left(e^2 - 1\right)}$

Or on a $\lim_{n \to +\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ (limite du cours)

Donc, par encadrement : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} R_n = 0}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$R_{n+1} = \int_0^2 \frac{(2-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt$$

$$= \left[\frac{(2-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t\right]_0^2 - \int_0^2 -\frac{(2-t)^n}{n!} e^t dt$$

$$= 0 - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} e^0 + \underbrace{\int_0^2 \frac{(2-t)^n}{n!} e^t dt}_{R_n}$$

$$= R_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

On a donc bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, R_{n+1} = R_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}$

4. On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $e^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} + R_n$.

I $(n=0)$. $\sum_{k=0}^{0} \frac{2^k}{k!} + R_0 = \frac{2^0}{0!} + e^2 - 1 = e^2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{2^k}{k!} + R_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} + \underbrace{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + R_{n+1}}_{R_n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} + R_n = e^2 \text{ donc } \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie.}$$

Ainsi, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} + R_n}$

5. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} = e^2 - R_n$

Or $R_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} = e^2}$

Exercice 2 groupe A'

1. $f \in \mathcal{C}^{N+1}(I)$ et $n \leqslant N$, donc $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, donc $f^{(n+1)}$ existe et est continue sur I.

1

Donc $t \longmapsto \dfrac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)$ est définie et continue sur I.

Or 0 et x appartiennent à I, donc $\boxed{\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \text{ est bien définie}}$

2. $$R_0 = \int_0^x \frac{(x-t)^0}{0!} f^{(1)}(t)\,dt = \int_0^x f'(t)\,dt = \Big[f(t)\Big]_0^x = f(x) - f(0)$$

2

On a donc bien $\boxed{f(x) = f(0) + R_0}$

3. Soit $n \in [\![0, N-1]\!]$

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

On intègre par partie avec :

3

$u(t) = f^{(n+1)}(t) \qquad v' = \dfrac{(x-t)^n}{n!} = \dfrac{-1}{n!} \times \left(-(x-t)^n\right)$

$u'(t) = f^{(n+2)}(t) \qquad v = -\dfrac{1}{n!} \times \dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)} = -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$

On a bien $u \in \mathcal{C}^1$ car $n+1 \leqslant N$.

d'où $$R_n(x) = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(0) + R_{n+1}(x)}$$

6

4. On va prouver cette égalité par récurrence sur n.

(I) Pour $n=0$, c'est l'égalité prouvée à la question 2.

(H) Soit $n \in [\![0, N-1]\!]$. On suppose la propriété vraie au rang n.

Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

3

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + R_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \overbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) + R_{n+1}(x)}^{R_n(x)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + R_n(x)$$

$$= f(x) \text{ par hypothèse de récurrence.}$$

Donc, par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in [\![0, N]\!], \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + R_n(x)}$$

9

5. Soit $x > 0$.

On a, d'après la question 4 :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| = \left| R_N(x) \right| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\, dt \right|$$

$$\leq \int_0^x \left| \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t) \right| dt$$

inégalité triangulaire car $0 < x$

$$= \int_0^x \frac{|x-t|^N}{N!} \left| f^{(N+1)}(t) \right| dt$$

opérations sur les valeurs absolues.

Or $\forall t \in [0, x]$, $\dfrac{|x-t|^N}{N!} \left| f^{(N+1)}(t) \right| = \dfrac{(x-t)^N}{N!} \left| f^{(N+1)}(t) \right| \leq \dfrac{(x-t)^N}{N!} M_x$

Donc, en intégrant sur $[0, x]$ (ce qui est licite car $0 < x$) :

$$\int_0^x \frac{|x-t|^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\, dt \leq \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} M_x \, dt$$

$$= \frac{M_x}{N!} \int_0^x (x-t)^N \, dt$$

$$= \frac{M_x}{N!} \left[- \frac{(x-t)^{N+1}}{N+1} \right]_0^x$$

$$= \frac{M_x}{N!} \left(0 + \frac{x^{N+1}}{N+1} \right)$$

$$= M_x \times \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} = M_x \times \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \quad \text{car } x \geq 0$$

4

13

Soit $x < 0$.

On a, d'après la question 4 :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| = |R_N(x)| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{N+1}(t)\, dt \right|$$

$$= \left| \int_x^0 \frac{(x-t)^N}{N!} f^{N+1}(t)\, dt \right|$$

$$\leqslant \int_x^0 \left| \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t) \right| dt$$

$$= \int_x^0 \frac{|x-t|^N}{N!} \left| f^{(N+1)}(t) \right| dt$$

inégalité triangulaire car $x < 0$

opérations sur les valeurs absolues.

Or $\forall t \in [x, 0]$, $\displaystyle \frac{|x-t|^N}{N!} \left| f^{(N+1)}(t) \right| = \frac{(t-x)^N}{N!} \left| f^{(N+1)}(t) \right| \leqslant \frac{(t-x)^N}{N!} M_x$

car $x - t \leqslant 0$

Donc, en intégrant sur $[x, 0]$ (ce qui est licite car $x < 0$) :

$$\int_x^0 \frac{|t-x|^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\, dt \leqslant \int_x^0 \frac{(t-x)^N}{N!} M_x\, dt$$

$$= \frac{M_x}{N!} \int_x^0 (t-x)^N\, dt$$

$$= \frac{M_x}{N!} \left[\frac{(t-x)^{N+1}}{N+1} \right]_x^0$$

$$= \frac{M_x}{N!} \left(\frac{(-x)^{N+1}}{N+1} - 0 \right)$$

$$= M_x \times \frac{(-x)^{N+1}}{(N+1)!} = M_x \times \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \quad \text{car } x \leqslant 0$$

Dans les 2 cas ($x > 0$ et $x < 0$), on a bien :

$$\boxed{\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| \leqslant M_x \times \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}}$$

Partie 2 - Applications.

1\. (a) $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(k)}(x) = e^x$

1 Donc $\forall k \in [\![0,n]\!],\ f^{(k)}(0) = e^0 = 1$.

D'où : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) = \dfrac{x^k}{k!}$

(b) <u>Si $x > 0$:</u> $e^x > 1$ donc $M_x = e^x$.

Alors, $\forall t \in [0,x],\ |f^{N+1}(t)| = |e^t| = e^t \leqslant e^x$.

On a donc bien : $\boxed{\forall t \in [0,x],\ |f^{N+1}(t)| \leqslant M_x.}$

2 <u>Si $x < 0$:</u> $e^x < 1$ donc $M_x = 1$.

Alors $\forall t \in [x,0],\ |f^{N+1}(t)| = |e^t| = e^t < 1$.

On a donc bien : $\boxed{\forall t \in [x,0],\ |f^{N+1}(t)| \leqslant M_x.}$

(c) L'inégalité de Taylor-Lagrange, vue à la question 5 est :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| \leqslant M_x \times \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$$

Or ici $f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) = e^x - \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}$

4 Donc : $\left| e^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant M_x \times \dfrac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$

Or $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} = 0$ (croissance comparée)

Donc, par encadrement : $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \left| e^x - \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} \right| = 0$

D'où $\boxed{e^x = \displaystyle\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!}}$

20

$\longmapsto$ Bonus.

2. (a) $f'(x) = -\dfrac{-1}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

$f''(x) = -2\times\dfrac{-1}{(1-x)^3} = \dfrac{2}{(1-x)^3}$

$f^{(3)}(x) = 2\times(-3)\times\dfrac{-1}{(1-x)^4} = \dfrac{3!}{(1-x)^4}$

...

$$\boxed{\begin{array}{l} f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}} \\[2ex] \text{On a dnc } f^{(k)}(0) = k! \end{array}}$$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\times f^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\times k! = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \dots + x^n.$

$$\left(\frac{t-x}{t-1}\right)' = x-1$$

$$\left(\frac{x-t}{1-t}\right)' = \frac{x-1}{(1-t)^2}$$

(c) $\displaystyle R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\times f^{(n+1)}(t)\,dt = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\times\frac{(n+1)!}{(1-t)^{n+2}}\,dt$

$$= \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \times \frac{n+1}{(1-t)^2}\,dt$$

$$= \frac{n+1}{x-1}\int_0^x \underbrace{\frac{x-1}{(1-t)^2}\times\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n}_{u'\times u^n} dt$$

$$= \frac{\cancel{n+1}}{x-1}\times\left[\frac{\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^{n+1}}{\cancel{n+1}}\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{x-1}\times x^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{x-1}$$

L'inégalité de Taylor avec reste intégral donne dnc ici

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\ \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

(d) Ce résultat se déduisait beaucoup plus simplement de la formule :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\ \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$