DM10 - Correction

Partie 1 - Loi de X_n lorsque $r = b = d = 1$

1. Après 1 tirage, il peut y avoir 1 ou 2 boules rouges dans l'urne

Donc $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$

$P(X_1 = 1) = P(\overline{R_1}) = \frac{1}{2}$.

$P(X_1 = 2) = P(R_1) = \frac{1}{2}$

Donc $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,2]\!])}$

1

$X_2(\Omega) = [\![1,3]\!]$

$P(X_2 = 1) = P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = P(\overline{R_1}) \times P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

$P(X_2 = 3) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$P(X_2 = 2) = 1 - (P(X_2 = 1) + P(X_2 = 3)) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Donc $\boxed{X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,3]\!])}$

2

2.(a) On a bien $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,2]\!])$ donc la propriété est vraie au rang $n=1$.

(b i A) On cherche $P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=k)$ avec $i=k$.

On cherche donc $P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k)$ c'est-à-dire la probabilité d'avoir k boules rouges après $n+1$ tirages sachant qu'il y en a k après n tirages.

C'est donc la probabilité de tirer une boule bleue au $(n+1)$-ième tirage sachant qu'il y a k rouges dans l'urne avant ce tirage.

Autrement dit : $P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k) = P_{[X_n=k]}(\overline{R_{n+1}})$

Si $X_n=k$, il y a donc k boules rouges dans l'urne après le n-ième tirage

Or après n tirages il y a $2+n$ boules dans l'urne.

Il y a donc $n+2-k$ boules bleues avant le $(n+1)$-ième tirage.

2 Donc :

$$\boxed{P_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k) = \frac{n+2-k}{n+2}}$$

(B) On cherche $P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=k)$ avec $i=k-1$

On cherche donc $P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1}=k)$ c'est-à-dire la probabilité d'avoir k boules rouges après $n+1$ tirages sachant qu'il y en a $k-1$ après n tirages.

C'est donc la probabilité de tirer une boule rouge au $(n+1)$-ième tirage sachant qu'il y a $k-1$ rouges dans l'urne avant ce tirage.

Autrement dit : $P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1}=k) = P_{[X_n=k-1]}(R_{n+1})$

Si $X_n=k-1$, il y a donc $k-1$ boules rouges dans l'urne après le n-ième tirage

2 Donc :

$$\boxed{P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1}=k) = \frac{k-1}{n+2}}$$

$\frac{2}{7}$

1 (c) Si $X_n = i$ avec $i \neq k$ et $i \neq k-1$, il est impossible d'avoir $X_{n+1} = k$.

Donc $\boxed{\text{Si } i \neq k \text{ et } i \neq k-1,\ P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=k) = 0}$

(ii) $(X_n = i)_{1 \leq i \leq n+1}$ est un s.c.e.

Donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X=k) = \sum_{i=1}^{n+1} P\left((X_n=i) \cap (X_{n+1}=k)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} P(X_n=i) \times P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=k)$$

car $P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=k) = 0$ si $i \neq k$ et $i \neq k-1$

$$= \sum_{i=k-1}^{k} P(X_n=i) \times P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=k)$$

$$= P(X_n = k-1) \times P_{(X_n=k-1)}(X_{n+1}=k) + P(X_n=k) \times P_{(X_n=k)}(X_{n+1}=k)$$

$$= \frac{1}{n+1} \times \frac{k-1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \times \frac{n+2-k}{n+2}$$

car $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket)$ et d'après les questions 2bi A et B

$$= \frac{k-1+n+2-k}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+2}$$

Donc $\boxed{X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n+2 \rrbracket)}$

4

Partie 2 - Loi de Y_n dans le cas général.

1. (a) Y_1 vaut 1 si la 1ère boule tirée est rouge et 0 sinon.

Donc $Y_1(\Omega) = [\![0,1]\!]$ et $P(Y_1=1) = P(R_1) = \frac{r}{b+r}$

$P(Y_1=0) = P(\overline{R_1}) = 1 - \frac{r}{b+r} = \frac{b}{b+r}$.

1

$\boxed{Y_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{r}{r+b}\right) \text{ (loi de Bernoulli).}}$

(b) $Y_2(\Omega) = [\![0,1]\!]$ donc Y_2 suit une loi de Bernoulli.

$P(Y_2=1) = P(R_2)$

$= P(R_1 \cap R_2) + P(\overline{R_1} \cap R_2)$ Formule des probabilités totales avec le s.c.e $(R_1, \overline{R_1})$.

$= P(R_1)\, P_{R_1}(R_2) + P(\overline{R_1}) \times P_{\overline{R_1}}(R_2)$

$= \frac{r}{r+b} \times \frac{r+d}{r+b+d} + \frac{b}{r+b} \times \frac{r}{r+b+d}$

$= \frac{r(r+d)+rb}{(r+b)(r+b+d)}$

$= \frac{r\cancel{(r+b+d)}}{(r+b)\cancel{(r+b+d)}}$

$= \frac{r}{r+b}$

2

Donc $Y_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{r}{r+b}\right)$

(Y_2 suit finalement la même loi que Y_1).

15

2. (a) Si $S_n = k$, on a tiré k fois une boule rouge lors des n premiers tirages.

Et donc on a tiré $n-k$ fois une bleue.

On a donc ajouté $k \times d$ boules rouges dans l'urne qui contient alors :

- $r + kd$ boules rouges.
- $r + b + nd$ boules en tout (à chacun des n tirages, on a ajouté une boule).

2

Donc : $\boxed{P_{(S_n=k)}(Y_{n+1}=1) = \dfrac{r+kd}{r+b+nd}}$

(b) $\big((S_n=0), (S_n=1), \dots, (S_n=n)\big)$ est un s.c.e (c'est le s.c.e. associé à S_n).

Donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(Y_{n+1}=1) &= \sum_{k=0}^{n} P\big((S_n=k) \cap (Y_{n+1}=1)\big) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(S_n=k) \times P_{(S_n=k)}(Y_{n+1}=1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(S_n=k) \times \frac{r+kd}{r+b+nd} \\
&= \frac{1}{r+b+nd} \sum_{k=0}^{n} P(S_n=k)(r+kd) \\
&= \frac{1}{r+b+nd}\Big(r \underbrace{\sum_{k=0}^{n} P(S_n=k)}_{=1} + d \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k P(S_n=k)}_{=E(S_n)}\Big)
\end{aligned}$$

3

On a donc : $\boxed{P(Y_{n+1}=1) = \dfrac{r + d E(S_n)}{r+b+nd}}$

20

(c) Il suffit de remarquer que $S_{n+1} = S_n + Y_{n+1}$

Donc $E(S_{n+1}) = E(S_n) + E(Y_{n+1})$

2 Or $E(Y_{n+1}) = 0 \times P(Y_{n+1}=0) + 1 \times P(Y_{n+1}=1) = P(Y_{n+1}=1)$

D'où : $\boxed{E(S_{n+1}) = E(S_n) + P(Y_{n+1}=1)}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$P(Y_{n+2}=1) = \frac{r + d\,E(S_{n+1})}{r+b+(n+1)d} = \frac{r + d\,E(S_n) + d\,P(Y_{n+1}=1)}{r+b+(n+1)d}$$

Or, d'après la question 2.a, $r + d\,E(S_n) = (r+b+dn)\,P(Y_{n+1}=1)$

D'où :

$$P(Y_{n+2}=1) = \frac{(r+b+dn)\,P(Y_{n+1}=1) + d\,P(Y_{n+1}=1)}{r+b+(n+1)d}$$

$$= \frac{(r+b+(n+1)d)\,P(Y_{n+1}=1)}{r+b+(n+1)d} = P(Y_{n+1}=1).$$

4 On a donc bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P(Y_{n+2}=1) = P(Y_{n+1}=1)}$

4. De la question 3, on déduit que la suite $\big(P(Y_n=1)\big)$ est constante.

1 Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y_n=1) = \frac{r}{r+b}$

Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{r}{r+b}\right)}$$

27

Partie 3 - Simulation

③ Total : 30 pts

Version 1

```
function Y= polya(r,b,d,n)
    Y= []
    for k=1:n
        a = rand()
        if a < r/(r+b)
            Y= [Y, 1]
            r= r+d
        else
            Y=[Y,0]
            b= b+d
        end
    end
endfunction.
```

Version 1'

```
function Y= polya(r,b,d,n)
    Y= []
    for k=1:n
        if rand() < r/(r+b)
            Y= [Y, 1]
            r= r+d
        else
            Y=[Y,0]
            b= b+d
        end
    end
endfunction.
```

Version 2

```
function Y= polya(r,b,d,n)
    Y= []
    for k=1:n
        B= grand(1,1,"uin", 1, r+b)
        if B <= r
            Y= [Y, 1]
            r= r+d
        else
            Y=[Y,0]
            b= b+d
        end
    end
endfunction.
```

Version 2'

```
function Y= polya(r,b,d,n)
    Y= []
    for k=1:n
        B= floor(1 + (r+b) * rand())
        if B <= r
            Y= [Y, 1]
            r= r+d
        else
            Y=[Y,0]
            b= b+d
        end
    end
endfunction.
```

Remarque : certains élèves ont proposé le programme suivant :
Quel est le souci ?

```
r = input("entrer r")
b = input("entrer b")
d = input("entrer d")
n = input("entrer n")
m = r + b
Y = []
for k = 1:n
    B = floor(1+ m*rand())
    if B <= r
        Y = [Y, 1]
        r = r + d
        m = r + b
    else
        Y = [Y, 0]
        b = b + d
        m = r + b
    end
end
disp(Y)
```