Exercice 1

1. • $\boxed{E_1 \subset \mathbb{R}^3}$

• $(0,0,0) \in E_1$ car $0+0-2\times 0 = 0$ donc $\boxed{E_1 \neq \emptyset}$

• Soit $(u,v) \in E_1^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$u = (x,y,z)$ avec $x+y-2z=0$

$v = (x',y',z')$ avec $x'+y'-2z'=0$

$$\lambda u + \mu v = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) + (\mu x', \mu y', \mu z')$$
$$= (\underbrace{\lambda x + \mu x'}_{X}, \underbrace{\lambda y + \mu y'}_{Y}, \underbrace{\lambda z + \mu z'}_{Z})$$

On a
$$X+Y-2Z = \lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' - 2(\lambda z + \mu z')$$
$$= \lambda \underbrace{(x+y-2z)}_{0} + \mu \underbrace{(x'+y'-2z')}_{0}$$
$$= 0$$

Donc $\boxed{\lambda u + \mu v \in E_1}$

Donc $\boxed{E_1 \text{ est un sev de } \mathbb{R}^3}$

2. $E_2 \subset \mathbb{R}_3$ mais $(0,0,0) \notin E_2$ (car $0+0-2\times 0 \neq 1$)
donc E_2 n'est pas un espace vectoriel.

3. On pose $u = (-1,1,0)$ et $v = (1,1,0)$.
On a $u \in E_3$ et $v \in E_3$ or $u+v = (0,2,0) \notin E_3$
E_3 n'est pas stable par combinaison linéaire, donc ce n'est pas un espace vectoriel.

4. • $E_4 \subset \mathbb{R}^3$

• $(0,0,0) \in E_4$ car $0+2\times 0+2\times 0=0$ et $3\times 0-0+0=0$.

Donc $E_4 \neq \emptyset$

• Soit $(u,v) \in E_4^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$u=(x,y,z)$ avec $x+2y+2z=0$ et $3x-y+z=0$

$v=(x',y',z')$ avec $x'+2y'+2z'=0$ et $3x'-y'+z'=0$

$$\lambda u+\mu v = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)+(\mu x', \mu y', \mu z')$$
$$= (\underbrace{\lambda x+\mu x'}_{X}, \underbrace{\lambda y+\mu y'}_{Y}, \underbrace{\lambda z+\mu z'}_{Z})$$

On a
$$X+2Y+2Z = \lambda x+\mu x'+2(\lambda y+\mu y')+2(\lambda z+\mu z')$$
$$= \lambda(\underbrace{x+2y+2z}_{0})+\mu(\underbrace{x'+2y'+2z'}_{0})$$
$$=0$$

et
$$3X-Y+Z = 3(\lambda x+\mu x')-(\lambda y+\mu y')+\lambda z+\mu z'$$
$$= \lambda(\underbrace{3x-y+z}_{0})+\mu(\underbrace{3x'-y'+z'}_{0})$$
$$=0$$

Donc $\lambda u+\mu v \in E_4$

Donc $\boxed{E_4 \text{ est un sev de } \mathbb{R}^3}$

5. • $\underline{E_S \subset \mathbb{R}^3}$

• $(0,0,0) \in E_S$ (correspond au choix $x=0$ et $y=0$)

donc $\underline{E_S \neq \emptyset}$

• Soit $(u,v) \in E_S^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$u = (x+y,\ 2y-x,\ 3x+y)$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$v = (x'+y',\ 2y'-x',\ 3x'+y')$ où $(x',y') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\lambda u + \mu v &= (\lambda x+\lambda y,\ 2\lambda y-\lambda x,\ 3\lambda x+\lambda y) + (\mu x'+\mu y',\ 2\mu y'-\mu x',\ 3\mu x'+\mu y') \\ &= \left(\lambda x+\mu x' + \lambda y+\mu y',\ 2(\lambda y+\mu y')-(\lambda x+\mu x'),\ 3(\lambda x+\mu x')+\lambda y+\mu y'\right) \\ &= (X+Y,\ 2Y-X,\ 3X+Y) \text{ avec } X=\lambda x+\mu x' \text{ et } Y=\lambda y+\mu y'.\end{aligned}$$

Donc $\underline{\lambda u+\mu v \in E_S}$

Donc $\boxed{E_S \text{ est un sev de } \mathbb{R}^3}$

6. • $E_6 \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (l'espace vectoriel des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$).

• Notons (s_n) la suite nulle.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_{n+2} = 0$ et $s_{n+1} + 4 s_n = 0 + 4 \times 0 = 0$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_{n+2} = s_{n+1} + 4 s_n$

Donc $(s_n) \in E_6$ donc $E_6 \neq \emptyset$

• Soient (u_n) et (v_n) deux suites de E_6, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

On pose $w = \lambda u + \mu v$ ← Rappel : On note u ou (u_n) la suite (u_n)

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} &= \lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} \\ &= \lambda(u_{n+1} + 4 u_n) + \mu(v_{n+1} + 4 v_n) \\ &= \underbrace{\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}}_{w_{n+1}} + 4(\underbrace{\lambda u_n + v_n}_{w_n}) \\ &= w_{n+1} + 4 w_n \end{aligned}$$

car (u_n) et (v_n) sont dans E_6

Donc $w \in E_6$

Donc $\boxed{E_6 \text{ est un s.e.v de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$

7) • $E_7 \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$).

• Notons φ la fonction nulle.

$\varphi(2)$ vaut 0 donc $\varphi \in E_7$, donc $\boxed{E_7 \neq \emptyset}$

• Soient f et g deux fonctions de E_7 et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

On pose $h = \lambda f + \mu g$.

$h(2) = \lambda f(2) + \mu g(2) = 0 + 0$ car $f \in E_7$ et $g \in E_7$

Donc $\boxed{h \in E_7}$

D'où $\boxed{E_7 \text{ est un sev de } \mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$

8) • $E_8 \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

• On note $\mathcal{O}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Tous les coefficients de $\mathcal{O}$ sont égaux donc $\mathcal{O} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

• Soient M et N deux matrices de E_8 et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Tous les coefficients de M sont égaux, idem pour les coefficients de N.

donc tous les coefficients de λM sont égaux, idem pour les coefficients de μN.

donc tous les coefficients de $\lambda M + \mu N$ sont égaux.

donc $\lambda M + \mu N \in E_8$

→ Autre rédaction possible :

On a $M = \begin{pmatrix} a & \cdots & a \\ \vdots & & \vdots \\ a & \cdots & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$

et $N = \begin{pmatrix} b & \cdots & b \\ \vdots & & \vdots \\ b & \cdots & b \end{pmatrix}$ avec $b \in \mathbb{R}$.

Alors $\lambda M + \mu N = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu b & \cdots & \lambda a + \mu b \\ \vdots & & \\ \lambda a + \mu b & \cdots & \lambda a + \mu b \end{pmatrix}$

Donc $\lambda M + \mu N \in E_8$

Donc E_8 est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

10) • $\boxed{E_{10} \subset \mathbb{R}_n[X]}$

• Notons N le polynôme nul.

On a $N(X+1) = 0$ et $N(X) = 0$

donc $N(X+1) = N(X)$

Donc $N \in E_{10}$ donc $\boxed{E_{10} \neq \emptyset.}$

• Soient P_1 et P_2 deux polynômes de E_{10} et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

On pose $Q = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$

$$\begin{aligned} Q(X+1) &= \lambda_1 P_1(X+1) + \lambda_2 P_2(X+1) \\ &= \lambda_1 P_1(X) + \lambda_2 P_2(X) \quad \text{car } P_1 \text{ et } P_2 \text{ sont dans } E_{10}. \\ &= Q(X) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{Q \in E_{10}}$

Donc E_{10} est un s.e.v. de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 11

2. $(2k+1, k, -k) \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2) \iff (2k+1, k, -k) = a(1,-2,1) + b(0,1,2)$

$$\iff (2k+1, k, -k) = (a, -2a+b, a+2b)$$

$$\iff \begin{cases} 2k+1 = a \\ k = -2a+b \\ -k = a+2b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 2k+1 \\ k = -2(2k+1) + b \\ -k = 2k+1 + 2b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 2k+1 \\ 5k+2 = b \\ 0 = 3k+1 + 2(5k+2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 2k+1 \\ b = 5k+2 \\ 0 = 13k+5 \end{cases}$$

$$\boxed{\iff \begin{cases} a = 2k+1 \\ b = 5k+2 \\ k = -\frac{5}{13} \end{cases}}$$