Colle 17 – Variables aléatoires réelles finies.

Exercice 1 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On procède à des tirages successifs et sans remise d'une boule dans cette urne jusqu'à l'obtention de la boule numéro n. On note alors X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, exprimer l'événement $[X = k]$ en fonction des événements S_i : «on obtient le numéro n au i-ème tirage» $(1 \leqslant i \leqslant n)$.
2. Déterminer la loi de X.

Exercice 2 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce dont la probabilité d'apparition de «pile» est égale à $p \in]0, 1[$. On désigne par X la variable aléatoire égale au numéro du lancer au cours duquel apparait «pile» pour la première fois, ou égale à $n + 1$ si «pile» n'apparait pas au cours des n lancers.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que $\mathrm{E}(X) = \dfrac{1 - (1 - p)^{n+1}}{p}$.

Exercice 3 .

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire simultanément 2 boules.

1. On note Y le plus grand des numéros des deux boules.
   Déterminer la fonction de répartition de Y, puis la loi de Y et enfin l'espérance de Y.
2. On note X le plus petit des numéros des deux boules. Déterminer la loi de X.

Exercice 4 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de $n + 1$ urnes numérotées de 0 à n, contenant chacune n boules, et d'une pièce dont la probabilité d'apparition de «pile» est $p \in [0, 1]$. L'urne k contient k boules portant le numéro 1 et $n - k$ boules portant le numéro 0.
On lance n fois la pièce et on tire une boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de «piles» obtenus.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tiré et Y la variable aléatoire égale au nombre de «piles» obtenus.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Déterminer la loi de X.
3. On a tiré une boule numéro 1. Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de l'urne n ?

Exercice 5 .

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire réelle prenant ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Montrer que

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(X > k)$$

Exercice 6 .

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On considère une urne contenant n boules. On tire successivement sans remise un nombre $k < n$ de boules de l'urne et on note X le plus grand des numéros tirés. Quelle est la loi de X ?

Reprendre l'exercice dans le cas d'un tirage successif avec remise d'un nombre $k < n$ de boules.

Exercice 7 .

Une urne contient n boules identiques au toucher numérotées de 1 à n. On tire les boules une à une sans remise et on s'arrête dès qu'on tire un numéro supérieur au numéro tiré précédemment. On appelle L la longueur de la suite ainsi obtenue.

Lorsque, on n'a pas rencontré de numéro supérieur au numéro précédent, on pose $L = n + 1$.

(1) Déterminer la fonction de répartition de L, puis en déduire la loi de L.

(2) Déterminer la loi de L lorsqu'on procède à des tirages avec remise.

Exercice 8 .

On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$ telle que $P(X = k) = \lambda k\binom{n}{k}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

(1) Déterminer λ.

(2) Montrer que $Y = 2X + 1$ est une variable aléatoire discrète puis donner sa loi.

Exercice 9 .

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binômiale de paramètre (n, p). Déterminer l'espérance de $Y = \dfrac{1}{1+X}$.