Exercice 1

2. (La question 1 est inutile).

$X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ car on peut effectuer entre 1 et n tirages.

$P(X=1) = P(S_1) = \frac{1}{n}$

$P(X=2) = P(\overline{S_1} \cap S_2) = P(\overline{S_1}) \times P_{\overline{S_1}}(S_2) = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$

etc. –

Plus généralement, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$P(X=k) = P(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \cdots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k)$$

$$= P(\overline{S_1}) \times P_{\overline{S_1}}(\overline{S_2}) \times \cdots \times P_{\overline{S_1} \cap \cdots \cap \overline{S_{k-2}}}(\overline{S_{k-1}}) \times P_{\overline{S_1} \cap \cdots \cap \overline{S_{k-1}}}(S_k)$$

$$= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-1-(k-2)}{n-(k-2)} \times \frac{1}{n-(k-1)}$$

$$= \frac{\cancel{n-1}}{n} \times \frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}} \times \cdots \times \frac{\cancel{n-k+1}}{\cancel{n-k+2}} \times \frac{1}{\cancel{n-k+1}}$$

$$= \frac{1}{n}$$

Donc : $\forall k \in [\![1, n]\!], \; P(X=k) = \frac{1}{n}$

Autrement dit : $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])}$

<u>Remarque</u> : On peut retrouver ce résultat par un raisonnement plus simple :
Les boules étant indiscernables, elles ont toutes la même probabilité d'être tirée au k-ième tirage. Comme il y a n boules, chaque boule a une probabilité de $\frac{1}{n}$ d'être tirée au k-ième tirage. Ainsi, la n-ième boule, comme toutes les autres, a une probabilité de $\frac{1}{n}$ d'être tirée au n-ième tirage : $\boxed{P(X=k) = \frac{1}{n}}$

Exercice 2

1. $X(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.

Notons P_i l'événement "obtenir Pile au i-ème lancer".

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X=k) = P(\overline{P_1} \cap \cdots \cap \overline{P_{k-1}} \cap P_k)$$

$$= P(\overline{P_1}) \times \cdots \times P(\overline{P_{k-1}}) \times P(P_k) \quad \text{par indépendance des lancers.}$$

$$= (1-p) \times \cdots \times (1-p) \times p$$

$$= (1-p)^k p$$

$$P(X=n+1) = P(\overline{P_1} \cap \cdots \cap \overline{P_n})$$

$$= P(\overline{P_1}) \times \cdots \times P(\overline{P_n}) \quad \text{par indépendance des lancers.}$$

$$= (1-p)^n$$

D'où
$$\boxed{P(X=k) = \begin{cases} (1-p)^k \times p & \text{si } k \in [\![1, n]\!] \\ (1-p)^n & \text{si } k = n+1 \end{cases}}$$

2. Question difficile $\rightarrow$ vous l'aurez en DM (avec indications).

Exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On cherche $P(Y \leqslant x)$.

- Si $x < 2$, $P(Y \leqslant x) = 0$ car Y vaut au minimum 2.
- Si $x \geqslant n$, $P(Y \leqslant x) = 1$ car Y vaut au maximum n.
- Si $x \in [2, n]$:

$(Y \leqslant x)$ est l'évènement "la plus grande des 2 boules est inférieure ou égale à x".

Cet évènement est aussi "les 2 boules ont un numéro inférieur ou égal à x"

Et comme les numéros sont des entiers, cet évènement s'écrit encore :

"les 2 boules ont un numéro inférieur ou égal à $\lfloor x \rfloor$".

Or il y a $\binom{n}{2}$ tirages possibles, tous équiprobables.

Et parmi ces tirages, il y en a $\binom{\lfloor x \rfloor}{2}$ dont les 2 boules sont inférieures ou égales à $\lfloor x \rfloor$

Donc $P(Y \leqslant x) = \dfrac{\binom{\lfloor x \rfloor}{2}}{\binom{n}{2}} = \dfrac{\frac{\lfloor x \rfloor(\lfloor x \rfloor - 1)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}} = \dfrac{\lfloor x \rfloor(\lfloor x \rfloor - 1)}{n(n-1)}$.

D'où :

$$\boxed{P(Y \leqslant x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 2 \\ \dfrac{\lfloor x \rfloor(\lfloor x \rfloor - 1)}{n(n-1)} \text{ si } x \in [2, n[\\ 1 \text{ si } x \geqslant n \end{cases}}$$

Loi de Y :

$Y(\Omega) = [\![2, n]\!]$

$\forall k \in [\![2, n]\!], \ P(Y=k) = P(Y \leqslant k) - P(Y \leqslant k-1).$

- $P(Y=2) = P(Y \leqslant 2) - P(Y \leqslant 1)$

$$= P(Y \leqslant 2) = \frac{2(2-1)}{n(n-1)}$$

- $\forall k \in [\![3, n]\!], \ P(Y=k) = P(Y \leqslant k) - P(Y \leqslant k-1)$

$$= \frac{k(k-1)}{n(n-1)} - \frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)}$$

$$= \frac{(k-1)(k-(k-2))}{n(n-1)}$$

$$= \frac{2(k-1)}{n(n-1)}$$

D'où :

$$\boxed{\forall k \in [\![2, n]\!] \quad P(Y=k) = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}}$$

Espérance de Y :

$$E(Y) = \sum_{k=2}^{n} k \times \frac{2(k-1)}{n(n-1)}$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \times \sum_{k=2}^{n} k^2 - k$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \times \sum_{k=1}^{n} k^2 - k \qquad (\text{car pour } k=1, \ k^2 - k = 0)$$

$$= \frac{2}{n(n-1)} \times \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{n-1} \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{3(n+1)}{3} \right)$$

$$= \frac{(n+1)(2n-2)}{3(n-1)} = \frac{2(n+1)}{3}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{2(n+1)}{3}}$$

Exercice 4

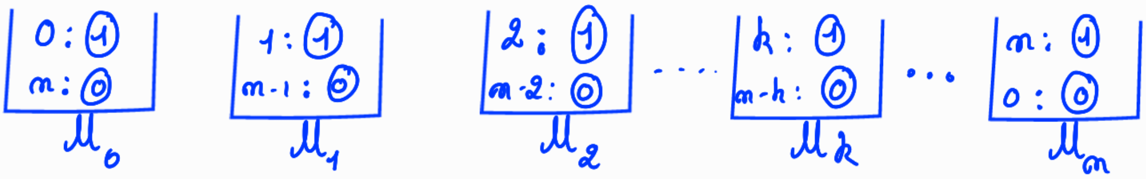
⚠ Dans cette exercice, il faut bien comprendre en quoi consiste l'expérience !

L'expérience se fait en 2 étapes :

<u>1ère étape</u> : on lance n fois une pièce déséquilibrée, qui tombe sur "Pile" avec la probabilité p (et donc sur "Face" avec une probabilité $1-p$)

On note Y le nombre de "Pile" obtenus

<u>2ème étape</u> : On a $n+1$ urnes, numérotées de 0 à n :



On tire une boule dans l'urne dont le numéro est donné par Y.

X est le numéro de cette boule.

1. $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

2. $X(\Omega) = [\![0,1]\!]$

$\big((Y=0),(Y=1),\dots,(Y=n)\big)$ est un s.c.e.

Donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X=1) = \sum_{k=0}^{n} P\big((Y=k)\cap(X=1)\big)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(Y=k)\times P_{(Y=k)}(X=1)$$

$P_{(Y=k)}(X=1) = \frac{k}{n}$ car si $Y=k$, on tire une boule dans l'urne k qui contient n boules, dont k avec le numéro 1.

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \times \frac{k}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

car pour $k=0$, $\frac{k}{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = 0$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k} (1-p)^{n-k}$$ car $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

$$= \sum_{k'=0}^{n-1} \binom{n-1}{k'} p^{k'+1} (1-p)^{n-(k'+1)}$$ On a posé $k' = k-1$ (donc $k = k'+1$)

$$= p \underbrace{\sum_{k'=0}^{n-1} \binom{n-1}{k'} p^{k'} (1-p)^{n-1-k'}}_{\longrightarrow \text{ binôme de Newton.}}$$

$$= p(p+1-p)^{n-1}$$

$$= p$$

Donc $\boxed{P(X=1) = p \quad \text{et} \quad P(X=0) = 1-p.}$

Bref $\boxed{X \hookrightarrow B(p)}$