DS n°6

Exercice 1 - Applications directe du cours

1. Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{(\ln(x))^2}{x}$.
2. Calculer $I_1 = \displaystyle\int_4^5 \frac{1}{3-t}\,\mathrm{d}t$.
3. Déterminer une primitive de $\arctan$ en utilisant une intégration par partie.
4. On pose $I_2 = \displaystyle\int_0^{\ln(\sqrt{3})} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $I_2 = \dfrac{\pi}{12}$, en posant $u = e^x$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ et X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$. Calculer $E\left(2^X\right)$.

Exercice 2

On considère une urne qui contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et on ajoute une boule **de couleur opposée** à celle qui vient d'être tirée.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après k tirages.
On a $X_0 = 1$.

On notera :

- B_k 'évènement : « on pioche une boule blanche au k-ième tirage ».
- N_k l'évènement : « on pioche une boule noire au k-ième tirage ».

1. Reconnaître la loi de X_1. Donner son espérance et sa variance.
2. (a) Justifier soigneusement que la loi de X_2 est donnée par :
$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{6} \quad ; \quad P(X_2 = 2) = \frac{2}{3} \quad ; \quad P(X_2 = 3) = \frac{1}{6}.$$
   (b) En déduire $E(X_2)$ et $V(X_2)$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Préciser $X_k(\Omega)$ en justifiant brièvement.
4. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in X_{k+1}(\Omega)$.
   (a) Déterminer $P_{(X_k = i-1)}(X_{k+1} = i)$.
   (b) Déterminer $P_{(X_k = i)}(X_{k+1} = i)$.
   (c) Exprimer alors $P(X_{k+1} = i)$ en fonction de $P(X_k = i)$ et $P(X_k = i-1)$
5. Déterminer alors la loi de X_3.

Exercice 3

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches, dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.
Pour chaque i de $[\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement : « le i-ème tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$ et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.
2. (a) Pour tout i de $[\![2, n-1]\!]$, justifier que $P_{B_1\cap\ldots\cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.
   (b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $P(X=k)$, pour tout k de $X(\Omega)$.
   (c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.
   (a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que :
   $$P\Big([X=k]\cap[Y=0]\Big) = \frac{n-k}{n(n-1)}$$
   (b) En déduire $P(Y=0)$.
   (c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.
4. Simulation informatique.
   (a) Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X.
   On admettra que la boule noire est codée tout au long de ce script par le nombre `nB+1`, où `nB` désigne le nombre de boules blanches.

```
n=input('entrez une valeur pour n : ')
nB=n-1
X=1
u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
while u<nB+1
        nB=________
        u=grand(1,1,'uin',1,_______)
        X=________
end
disp('la boule noire est apparue au tirage numero',X)
```

   (b) Compléter les lignes 4 et 8 ajoutées au script précédent afin que le script qui suit renvoie et affiche, en plus de celle prise par X, la valeur prise par Y.

```
1  n=input('entrez une valeur pour n : ')
2  nB=n-1
3  X=1
4  Y=________
5  u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
6  while u<nB+1
7          nB=________
8          if u==1 then Y=________
9          end
10         u=grand(1,1,'uin',1,________)
11         X=________
12 end
13 disp('la boule noire est apparue au tirage numero',X)
14 disp('la valeur de Y est',Y)
```

Problème

On considère la fonction f qui à tout réel x associe : $f(x) = \int_0^x \ln\left(1+t^2\right) dt$.

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie 1 : étude de f

1. (a) Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x.
   (b) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
   (c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).

2. Montrer que f est impaire.

3. (a) Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}$$

   (b) En déduire, grâce à une intégration par parties, une expression de $f(x)$.

Partie 2 : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt$.

4. (a) La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n ?
   (b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f.

5. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

6. (a) Établir l'encadrement suivant :

$$0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n$$

   (b) Que peut-on en déduire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

7. (a) Montrer que :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt \leqslant \frac{u_n}{1-\ln 2}$$

   (b) En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt$.
   (c) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} dt$$

   (d) En déduire que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} dt$$