DS07 - Correction

Exercice 1

1. $f = u'u^2$ avec $u(x) = \ln x$

donc f a pour primitive $F = \dfrac{u^3}{3}$.

$$\boxed{x \longmapsto \frac{(\ln x)^3}{3} \text{ est une primitive de } f.}$$

2. $$I_1 = \int_4^5 - \underbrace{\frac{-1}{3-t}}_{\frac{u'}{u}} \, dt = \Big[-\ln|3-t| \Big]_4^5 = \Big[-\ln(t-3) \Big]_4^5$$

car $3-t<0$ pour $t \in [4,5]$

$$= -\ln 2 + \ln 1$$

$$= -\ln 2.$$

$$\boxed{I_1 = -\ln 2}$$

3. On sait que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x \arctan t \, dt$ est une primitive de arctan.

On effectue une intégration par partie en posant :

$$u(t) = \arctan t \qquad v'(t) = 1$$

$$u'(t) = \frac{1}{1+t^2} \qquad v(t) = t$$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc l'IPP est licite.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^x \arctan t \, dt = \Big[t \arctan t \Big]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} \, dt$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{2t}{1+t^2} \, dt$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \Big[\ln(1+t^2) \Big]_0^x$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

$$\boxed{\text{Arctan a donc pour primitive } x \longmapsto x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)}$$

4. $x \mapsto e^x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ donc le changement de variable est licite.

$$u = e^x \longrightarrow du = e^x dx$$
$$x = \ln u \longrightarrow dx = \frac{1}{u} du$$
$$x = 0 \longrightarrow u = 1$$
$$x = \frac{1}{2}\ln 3 = \ln(\sqrt{3}) \longrightarrow u = \sqrt{3}$$

Donc $I_2 = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{u + \frac{1}{u}} \times \frac{1}{u} du = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+u^2} du$

$$= \left[\arctan u\right]_1^{\sqrt{3}}$$
$$= \arctan(\sqrt{3}) - \arctan(\pi/4)$$
$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\pi}{12}.$$

On a donc bien $\boxed{I_2 = \frac{\pi}{12}}$

5. D'après la formule du transfert :

$$E(2^X) = \sum_{k=0}^{n} 2^k P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2p)^k (1-p)^{n-k}$$

$$= (2p+1-p)^n = (p+1)^n$$

On a donc : $\boxed{E(2^X) = (p+1)^n}$

Exercice 2

1. $X_1(\Omega)=\{1,2\}$

$P(X_1=1)=P(B_1)=\frac{1}{2}$

$P(X_1=2)=P(N_1)=\frac{1}{2}$

Donc $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,2]\!])}$

On a donc $\boxed{E(X_1)=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}}$ et $\boxed{V(X_1)=\frac{2^2-1}{12}=\frac{1}{4}}$

2. (a) $X_2(\Omega)=[\![1,3]\!]$

$P(X_2=1)=P(B_1\cap B_2)$

$=P(B_1)\times P_{B_1}(B_2)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$P(X_2=3)=P(N_1\cap N_2)$

$=P(N_1)\times P_{N_1}(N_2)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

Donc $P(X_2=2)=1-(P(X_2=1)+P(X_2=3))$

$=1-\frac{2}{6}=\frac{2}{3}$

On a donc bien :

$$\boxed{P(X_2=1)=\frac{1}{6}\ ;\ P(X_2=2)=\frac{2}{3}\ ;\ P(X_2=3)=\frac{1}{6}}$$

(b) $E(X_2) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{12}{6} = 2$

$$E(X_2^2) = 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{2}{3} + 3^2 \times \frac{1}{6} = \frac{26}{6}$$

$$V(X_2) = E(X_2^2) - E(X_2)^2$$

$$= \frac{26}{6} - 4 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Donc : $\boxed{E(X_2) = 2 \quad \text{et} \quad V(X_2) = \frac{1}{3}}$

3. Après k tirages, il peut y avoir :

- 1 boule blanche dans l'urne si on n'a tiré que des boules blanches,
- 2 boules blanches 〃 〃 〃 〃 a tiré 1 boule noire,
- 3 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 2 〃 〃,

⋮

- $k+1$ 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 k 〃 〃.

Donc $\boxed{X_k(\Omega) = [\![1, k+1]\!]}$

4. (a) On se place après le k-ième tirage.

Il y a donc $2+k$ boules dans l'urne (les 2 initiales plus les k ajoutées)

Si $X_k = i-1$, on aura $X_{k+1} = i$ si on tire une boule noire au $(k+1)$-ième tirage, car alors on ajoutera une blanche.

Or si $X_k = i-1$, il y a $i-1$ boules blanches dans l'urne, sur un total de $2+k$ boules. Donc $2+k-(i-1) = k+3-i$ boules noires.

$$\boxed{P_{(X_k=i-1)}(X_{k+1}=i) = \frac{k+3-i}{k+2}}$$

(b) Par le même raisonnement :

$$\boxed{P_{(X_k=i)}(X_{k+1}=i) = \frac{i}{k+2}}$$

(c) $(X_k=j)_{1 \leq j \leq n+1}$ est un s.c.e.

D'après la formule des probabilités totales:

$$P(X_{k+1}=i) = \sum_{j=1}^{n+1} P\left((X_k=j) \cap (X_{k+1}=i)\right)$$

$$= \sum_{j=i-1}^{i} P\left((X_k=j) \cap (X_{k+1}=i)\right) \text{ car } P_{(X_k=j)}(X_{k+1}=i) = 0 \text{ si } j \notin \{i-1, i\}$$

$$= P(X_k=i-1) \times P_{(X_k=i-1)}(X_{k+1}=i) + P(X_k=i) \times P_{(X_k=i)}(X_{k+1}=i)$$

$$= P(X_k=i-1) \times \frac{k+3-i}{k+2} + P(X_k=i) \times \frac{i}{k+2}$$

D'où : $$\boxed{P(X_{k+1}=i) = P(X_k=i-1) \times \frac{k+3-i}{k+2} + P(X_k=i) \times \frac{i}{k+2}}$$

5. $X_3(\Omega) = [\![1,4]\!]$.

$P(X_3=1) = P(X_2=0) \times \frac{5-1}{4} + P(X_2=1) \times \frac{1}{4}$ $\longleftarrow$ Ici $k=2$ et $i=1$

$= 0 + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{24}$

$P(X_3=2) = P(X_2=1) \times \frac{5-1}{4} + P(X_2=2) \times \frac{2}{4}$ $\longleftarrow$ $k=2$; $i=2$

$= \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{4}$

$= \frac{11}{24}$

$P(X_3=3) = P(X_2=2) \times \frac{5-3}{4} + P(X_2=3) \times \frac{3}{4}$ $\longleftarrow$ $k=2$; $i=3$

$= \frac{2}{3} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4}$

$\frac{11}{24}$

$P(X_3=4) = P(X_2=3) \times \frac{5-4}{4} + P(X_2=4) \times \frac{4}{4}$ $\longleftarrow$ $k=2$, $i=$

$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{4}{4}$

$= \frac{1}{24}$

Exercice 3

1. $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ car il y a n boules dans l'urne, dont une noire.

2. (a) Si $B_1 \cap \cdots \cap B_{i-1}$ s'est réalisé, il reste donc $(n-1)-(i-1) = n-i$ boules blanches sur un total de $n-(i-1) = n-i+1$ boules.

Donc : $\boxed{P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}}$

(b) $P(X=k) = P(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k)$

$$= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times \cdots \times P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-2}}(B_{k-1}) \times P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(N_k)$$

$$= \frac{\cancel{n-1}}{n} \times \frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}} \times \cdots \times \frac{\cancel{n-(k-1)}}{\cancel{n-(k-1)+1}} \times \frac{1}{\cancel{n-k+1}}$$

$$= \frac{1}{n}$$

Donc $\boxed{P(X=k) = \dfrac{1}{n}}$

(c) $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!]) \text{ donc } E(X) = \dfrac{n+1}{2} \text{ et } V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}}$

3. (a) Notons

- Z_i : l'événement "le i-ième tirage donne une boule blanche numérotée 0"
- U_i : " " " " " " " " " 1"

$P((X=k) \cap (Y=0)) = P(Z_1 \cap \cdots \cap Z_{k-1} \cap N_k)$

$$= P(Z_1) \times \cdots \times P_{Z_1 \cap \cdots \cap Z_{k-2}}(Z_k) \times P_{Z_1 \cap \cdots \cap Z_{k-1}}(N_k)$$

$$= \frac{n-2}{n} \times \cdots \times \frac{n-2-(k-2)}{n-(k-2)} \times \frac{1}{n-(k-1)}$$

$$= \frac{(n-2) \times \cdots \times (n-k)}{n \times \cdots \times (n-k+1)} = \frac{\cancel{(n-2)} \times \cdots \times \cancel{(n-k+1)} \times (n-k)}{n(n-1)\cancel{(n-2)} \cdots \cancel{(n-k+1)}} = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

On a donc bien : $\boxed{P((X=k) \cap (Y=0)) = \dfrac{n-k}{n(n-1)}}$

(b) $(X=k)_{1\leq k\leq n}$ est un s.c.e. donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(Y=0) = \sum_{k=1}^{n} P\big((X=k)\cap(Y=0)\big)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n(n-1)}$$
$$= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} n-k \quad k'=n-k \ ; \ \begin{array}{l} k=n \longrightarrow k'=0 \\ k=1 \longrightarrow k'=n-1 \end{array}$$
$$= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k'=0}^{n-1} k'$$
$$= \frac{1}{n(n-1)} \times \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Donc : $\boxed{P(Y=0) = \frac{1}{2}}$

(c) $Y(\Omega) = [\![0,1]\!]$ et $P(Y=1) = 1-P(Y=0) = \frac{1}{2}$ donc $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)}$

4)

a)

```
n=input('entrez une valeur pour n : ')
nB=n-1
X=1
u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
while u<nB+1
        nB=nB-1
        u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
        X=X+1
end
disp('la boule noire est apparue au tirage numero',X)
```

b)

```
n=input('entrez une valeur pour n : ')
nB=n-1
X=1
Y=0
u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
while u<nB+1
        nB=nB-1
        if u==1 then Y=1
        end
        u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
        X=X+1
end
disp('la boule noire est apparue au tirage numero',X)
disp('la valeur de Y est',Y)
```

Problème

Partie 1

1. (a) $\forall t \in \mathbb{R},\ 1+t^2 \geqslant 1$ donc $\ln(1+t^2) \geqslant 0$.

$f(x)$ est donc l'intégrale d'une fonction positive.

Si $x \geqslant 0$, les bornes sont dans le bon ordre et $f(x) \geqslant 0$

Si $x \leqslant 0$, les bornes ne sont pas dans le bon ordre et $f(x) \leqslant 0$.

(b) On pose $h : t \longmapsto \ln(1+t^2)$.

D'après le théorème fondamental de l'analyse, f est la primitive de h qui s'annule en 0.

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = h$

Or $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, donc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

D'où :

$$\boxed{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \ln(1+x^2)}$$

Autre solution :

$h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ comme composée de : $\begin{cases} t \longmapsto 1+t^2 : \mathcal{C}^0 \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}_+^* \\ \text{et} \\ \ln : \mathcal{C}^0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$

Donc h admet une primitive H sur $\mathbb{R}$ qui est par définition dérivable sur $\mathbb{R}$.

$H' = h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ donc $H \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Or $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = H(x) - H(0)$.

Donc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = H'(x) = h(x) = \ln(1+x^2)$

(c) On a déjà vu que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(1+x^2) \geq 0$ donc :

$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \int_0^{-x} \ln(1+t^2)\,dt$$

On pose $u = -t$ donc $t = -u$
donc $dt = -du$

$$= \int_0^{x} \ln(1+(-u)^2) \cdot -du$$

$$= -\int_0^{x} \ln(1+u^2)\,du = -f(x)$$ donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$

3 (a) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{t^2}{1+t^2} = \dfrac{1+t^2-1}{1+t^2} = \dfrac{1+t^2}{1+t^2} - \dfrac{1}{1+t^2} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}$

Donc $\boxed{a = 1 \text{ et } b = -1}$

(b) $f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\,dt$

On pose $u(t) = \ln(1+t^2)$ et $v'(t) = 1$

Donc : $u'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ et $v(t) = t$

u et v sont de classe C^1 donc,

$$f(x) = \Big[t\ln(1+t^2)\Big]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x 1 - \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2\Big[t - \arctan t\Big]_0^x$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2\big(x - \arctan x - (0 - \arctan 0)\big)$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x$$

Donc : $\boxed{f(x) = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x}$

Partie 2

4 (a) oui car $\int_0^1 (\ln(1+t^2))^0 dt = \int_0^1 1 dt = 1$.

(b) $u_1 = \int_0^1 \ln(1+t^2)\, dt = f(1)$. Donc $\boxed{u_1 = f(1)}$

5 (a) Soit $n \in \mathbb{N}$,

Pour tout $t \in [0,1]$, $1 \leqslant 1+t^2 \leqslant 2$

donc $0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2) < \ln(e) = 1$.

donc $(\ln(1+t^2))^{n+1} \leqslant (\ln(1+t^2))^n$ $\quad$ (Si $\alpha \in [0,1]$, $\alpha^{n+1} \leqslant \alpha^n$)

Donc, en intégrant sur $[0,1]$:

$$u_{n+1} \leqslant u_n$$

D'où $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$

(b) Pour tout $t \in [0,1]$, $\ln(1+t^2) \geqslant 0$ donc $(\ln(1+t^2))^n \geqslant 0$

Donc, en intégrant sur $[0,1]$, $u_n \geqslant 0$

D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0}$

(u_n) est décroissante et minorée donc elle converge.

6. (a) Pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln 2$

donc $0 \leqslant \left(\ln(1+t^2)\right)^n \leqslant (\ln 2)^n$ car $x \mapsto x^n \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$.

Donc, en intégrant sur $[0,1]$:

$$\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n}$$

(b) On a $\ln 1 < \ln 2 < \ln e$

$\iff 0 < \ln 2 < 1$

Donc $(\ln 2)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc, par encadrement, $\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$

7. (a) Pour tout $t \in [0,1]$:

$$0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln 2$$

$x \mapsto 1-x \searrow$ sur $\mathbb{R}$.

$$\iff 1 \geqslant 1-\ln(1+t^2) \geqslant 1-\ln 2$$

$x \mapsto \frac{1}{x} \searrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\iff 1 \leqslant \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{1}{1-\ln 2}$$

car $\left(\ln(1+t^2)\right)^n \geqslant 0$.

$$\implies 0 \leqslant \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln 2}$$

Donc, en intégrant sur $[0,1]$:

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln 2}\,dt = \frac{1}{1-\ln 2}\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt$$

D'où : $$\boxed{0 \leqslant \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}\,dt \leqslant \frac{u_n}{1-\ln 2}}$$

(b) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{1-\ln 2} = 0$ donc, par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)}\, dt = 0}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (\ln(1+t^2))^k\, dt$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (\ln(1+t^2))^k \right) dt$$

par linéarité et parceque la somme est finie.

Or $\forall t \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (\ln(1+t^2))^k = \frac{1-(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)}$ car $\ln(1+t^2) \neq 1$

Donc $$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (\ln(1+t^2))^k \right) dt = \int_0^1 \frac{1-(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)}\, dt.$$

On a donc bien : $$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)}\, dt.}$$

Remarque : On pouvait rédiger cela en une ligne :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{\text{par linéarité}}{=} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (\ln(1+t^2))^k \right) dt \underset{\text{car } \forall t\in[0,1],\ \ln(1+t^2)\neq 1.}{=} \int_0^1 \frac{1-(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)}\, dt$$

Autre rédaction possible :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (q(t))^k \, dt$$

où on a posé $q(t) = \ln(1+t^2)$.

par linéarité

$$= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (q(t))^k \right) dt$$

car $\forall t \in [0,1]$, $q(t) \neq 1$. (somme géométrique)

$$= \int_0^1 \frac{1-(q(t))^n}{1-q(t)} \, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt$$

Remarque : On peut noter q_t à la place de $q(t)$, mais pas q. car c'est une expression qui dépend de t.

(d) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt.$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \, dt - \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt$$

Or on a vu que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)} \, dt = 0$

D'où : $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \, dt}$$