

# Programme de colle n° 18

## Semaine du 08/03/2021

### Espaces Vectoriels

#### Questions de cours

Toutes les questions de cours doivent être maîtrisées cette semaine

1. Qu'appelle-t-on une famille génératrice d'un espace vectoriel  $E$  ?

**Réponse attendue :**

C'est une famille de vecteurs de  $E$  telle que tout vecteur de  $E$  est combinaison linéaire de cette famille.

2. Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une famille de vecteurs d'un espace vectoriel  $E$ . Donner la définition d'une combinaison linéaire de  $(u_1, \dots, u_n)$ .

**Réponse attendue :**

C'est un vecteur de la forme  $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$  où  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont des scalaires.

3. Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une famille de vecteurs d'un espace vectoriel  $E$ . Qu'appelle-t-on  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$  et que peut-on en dire ?

**Réponse attendue :**

$\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$  est l'ensemble des combinaisons linéaires de  $(u_1, \dots, u_n)$ . C'est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Tout sous-espace vectoriel de  $E$  contenant les vecteurs  $u_1, \dots, u_n$  contient  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ .

4. Traduire  $v \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ .

**Réponse attendue :**

$v \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_n) \iff v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$ , où  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont des scalaires.

5. Traduire «  $(u_1, \dots, u_n)$  est une famille génératrice de  $E$  » à l'aide de  $\text{Vect}$ .

**Réponse attendue :**

«  $(u_1, \dots, u_n)$  est une famille génératrice de  $E \iff E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$  ».

6. (a) Donner la définition d'une famille libre, d'une famille liée.  
 (b) Une famille de un vecteur peut-elle être libre ? liée ?  
 (c) Comment cela se traduit-il pour une famille de deux vecteurs ?

**Réponse attendue :** Une famille de vecteurs  $(u_1, \dots, u_n)$  est libre si la seule combinaison linéaire de cette famille qui est nulle est la combinaison linéaire dont tous les coefficients sont nuls. Autrement dit si :

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0 \text{ implique } \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Une famille liée est une famille non libre.

Une famille comportant un seul vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.

Une famille de deux vecteurs est libre si et seulement si ces deux vecteurs sont non colinéaires.

7. Donner la caractérisation d'une famille liée.

**Réponse attendue :**

Une famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs est une combinaison linéaire des autres.

8. Que peut-on dire d'une sur-famille d'une famille génératrice et d'une sous-famille d'une famille libre ?

**Réponse attendue :**

Une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice

Une sous-famille d'une famille libre est libre.

9. A quelle condition peut-on enlever un vecteur d'une famille génératrice de sorte que la famille obtenue soit encore génératrice (*proposition 6 - réduction d'une famille génératrice*) ?

**Réponse attendue :**

Si dans une famille génératrice, un vecteur est combinaison linéaire des autres, alors la famille obtenue en enlevant ce vecteur reste génératrice.

10. Donner la liste des opérations que l'on peut faire sur les vecteurs d'un Vect sans le modifier (proposition 7 du cours).

**Réponse attendue :**

On ne change pas Vect  $(u_1, \dots, u_n)$  si on :

- enlève le vecteur nul (si la famille  $(u_1, \dots, u_n)$  en contient un !), ou un vecteur redondant, ou un vecteur qui s'écrit comme une combinaison linéaire des autres vecteurs,
- permuté des vecteurs,
- multiplie un vecteur par un scalaire non nul,
- remplace un vecteur par une combinaison linéaire de ce vecteur (avec un coefficient non nul pour ce vecteur) et d'autres vecteurs de la famille.

**Les questions suivantes pourront être posées à partir de mercredi :**

11. Donner la définition d'une base d'un espace vectoriel.

**Réponse attendue :**

C'est une famille libre et génératrice.

12. Donner la caractérisation d'une base par l'existence et l'unicité de la décomposition.

**Réponse attendue :**

Une famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est une base de  $E$  si tout vecteur de  $E$  s'écrit **de façon unique** comme combinaison linéaire de  $u_1, \dots, u_n$ .

13. Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une base d'un espace vectoriel  $E$ . Qu'appelle-t-on coordonnées d'un vecteur  $x \in E$  dans la base  $(u_1, \dots, u_n)$  ?

**Réponse attendue :**

$(u_1, \dots, u_n)$  étant une base de  $E$ ,  $x$  s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de  $u_1, \dots, u_n$ . Il existe donc un unique  $n$ -uplet  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  de scalaires tel que  $x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$ . Ce  $n$ -uplet  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  est appelé « coordonnées de  $x$  dans la base  $(u_1, \dots, u_n)$  ».

14. Donner la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^n$ , de  $\mathbb{R}_n[X]$  et de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Démonstrations (pour le groupe A')**

Membres du groupe A' :

- Yusef
- Dan
- Mylanh
- Anis
- Hafsa
- Lina
- Maxime
- Ismail
- Cédric
- Yacine

Après la question de cours vous devrez faire l'une des démonstrations suivantes :

- Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ . Prouver que  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  (voir démonstration à la fin de ce programme de colle).
- Démontrer la proposition 6 (réduction d'une famille génératrice - démonstration faite en classe).
- Démontrer la proposition 8 (voir démonstration à la fin de ce programme de colle) Voir la démonstration

**Méthodes à connaître pour les exercices**

**Pour lundi : connaître les méthodes 1 à 6 et savoir refaire tous les exercices faits en classe.**

**Pour mercredi et jeudi : connaître toutes les méthodes et savoir refaire tous les exercices faits en classe.**

## Démonstrations

1.  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

On va procéder comme d'habitude, en appliquant la méthode 1 : pour cela, on pose  $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ .  $F$  est donc l'ensemble des combinaisons linéaires de  $u_1, \dots, u_n$ .

- $u_1, \dots, u_n$  étant dans  $E$ , toute combinaison linéaire de ces vecteurs et dans  $E$  donc  $F \subset E$ .

- $\sum_{i=1}^n 0u_i = 0_E$  donc  $0_E \in F$  donc  $F \neq \emptyset$ .

- Soient  $(u, v) \in F^2$  et  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ . Montrons que  $au + bv \in E$ .

$u \in F$  donc  $\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ ,  $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ .

$v \in F$  donc  $\exists(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n) \in \mathbb{K}^n$ ,  $v = \sum_{i=1}^n \lambda'_i u_i$ . Alors :

$$\begin{aligned} au + bv &= a \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i + b \sum_{i=1}^n \lambda'_i u_i \\ &= \sum_{i=1}^n a\lambda_i u_i + b\lambda'_i u_i \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= \sum_{i=1}^n (a\lambda_i + b\lambda'_i) u_i \end{aligned}$$

Donc  $au + bv$  est une combinaison linéaire de  $u_1, \dots, u_n$  : on a bien  $au + bv \in F$ .

Donc  $F$  est s.e.v. de  $E$ .

2. On doit montrer qu'une famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

- **Sens direct :**

Montrons que si la famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est liée alors l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Si  $(u_1, \dots, u_n)$  est liée, il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls.

Il existe donc  $n$  scalaires non tous nuls  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0$ .

Quitte à renuméroter les  $u_i$ , on peut supposer que  $\lambda_n \neq 0$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0 &\iff \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i u_i + \lambda_n u_n = 0 \\ &\iff \lambda_n u_n = - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i u_i &\iff u_n = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=1}^{n-1} -\lambda_i u_i \quad \text{car } \lambda_n \neq 0. \\ &\iff u_n = \sum_{i=1}^{n-1} -\frac{\lambda_i}{\lambda_n} u_i. \end{aligned}$$

- **Réciproque :**

Montrons que si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres alors la famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est liée.

Quitte à renuméroter les  $u_i$ , on peut supposer que c'est  $u_n$  qui est combinaison linéaire des autres.

On a alors  $u_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i u_i$  où  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$ .

Ce qui équivaut à  $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i u_i - u_n = 0$ .

$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i u_i - u_n$  est donc une combinaison linéaire nulle des  $u_i$  à coefficients non tous nuls. Donc la famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est liée.