Chapitre 16

Comparaison de suites

Table des matières

1 Négligeabilité

1.1 Définition

Définition 1. (Suite négligeable devant une autre)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
On dit que (u_n) **est négligeable devant** (v_n) si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, ou bien $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$, ou encore $u_n = o(v_n)$

Attention ! « $\underset{n\to+\infty}{=}$ » n'est pas une égalité ! On peut avoir $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ avec $u_n \neq v_n$.

Remarque. (Notation)
L'écriture $a_n \underset{n\to+\infty}{=} b_n + o(c_n)$ signifie que $a_n - b_n \underset{n\to+\infty}{=} o(c_n)$

Exercice de cours 1. Montrer que $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Exercice de cours 2. Montrer que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1) \iff u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Proposition 1. (Relations de négligeable "évidentes".)

1. Une suite qui tend vers 0 est toujours négligeable devant une suite qui tend vers une limite non nulle :

$$\left\{\begin{array}{l} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ \text{et} \\ v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}^* \cup \{\pm\infty\} \end{array}\right. \implies u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n).$$

2. Une suite qui tend vers une limite finie est toujours négligeable devant une suite qui tend vers l'infini :

$$\left\{\begin{array}{l} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R} \\ \text{et} \\ v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty \end{array}\right. \implies u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n).$$

Exemple 1.

$$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(1) \quad ; \quad 1 \underset{n\to+\infty}{=} o(n) \quad ; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$$

.

1.2 Comparaison des suites usuelles

Les comparaisons suivantes doivent être connues par cœur et peuvent être utilisée sans démonstration.

Proposition 2. (Comparaison entre suites usuelles du même type) (admis)

1. Si $a < b$ alors $n^a = o(n^b)$.
2. Si $a < b$ alors $(\ln n)^a = o\Big((\ln n)^b\Big)$.
3. Si $0 < a < b$ alors $a^n = o(b^n)$.

Proposition 3. (Comparaison entre suites divergeant vers l'infini) (admis)

1. Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, alors $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$.
2. Si $\beta > 0$ et $q > 1$, alors alors $n^\beta = o\left(q^n\right)$.
3. Si $q > 1$ alors $q^n = o(n!)$.

Proposition 4. (Comparaison entre suites de limite nulle) (admis)

1. Si $|q| < 1$ alors $\dfrac{1}{n!} = o(q^n)$.
2. Si $|q| < 1$ et $\beta > 0$, alors $q^n = o\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$.
3. Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, alors $\dfrac{1}{n^\beta} = o\left(\dfrac{1}{(\ln n)^\alpha}\right)$.

Exemple 2.

1. $n^2 \underset{n\to+\infty}{=} o(n^3)$
2. $\dfrac{1}{n^3} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
3. $\ln n \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$
4. $(\ln n)^2 \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$
5. $n^3 \underset{n\to+\infty}{=} o(e^n)$
6. $e^n \underset{n\to+\infty}{=} o(3^n)$
7. $0,5^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$
8. $3^n \underset{n\to+\infty}{=} n!$.
9. $(-2)^n \underset{n\to+\infty}{=} n!$.

1.3 Négligeabilité et opérations

Proposition 5. (Négligeabilité et opérations) (admis)

1. **Transitivité :**
$$\left\{\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \\ \text{et} \\ v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n) \end{array}\right. \implies u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n).$$

2. **Multiplication par des scalaires non nul :**
$$\forall \lambda \neq 0, \mu \neq 0, \quad u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff \lambda u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\mu v_n).$$

3. **Somme de "o" :**
$$\left\{\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n) \\ \text{et} \\ v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n) \end{array}\right. \implies u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$$

4. (☆☆☆) **Multiplication par une suite non nulle à partir d'un certain rang** :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n) \implies u_n w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n w_n).$$

Remarque. Les points 2 à 4 ci-dessus peuvent s'écrire plus simplement :

2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*,\ \lambda o(u_n) = o(u_n)$ et $o(\lambda u_n) = o(u_n)$
3. $o(u_n) + o(u_n) = o(u_n)$
4. $u_n o(v_n) = o(u_n v_n)$.

Exemple 3.

1. $-4 + \ln n + 2n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^2)$
2. $\ln n \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$ donc $n \ln n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^2)$.

2 Équivalence

2.1 Définition

Définition 2. (Suites équivalentes)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, ou bien $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, ou encore $u_n \sim v_n$

Exemple 4.

1. $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$
2. $\dfrac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Proposition 6. (symétrie de l'équivalence) (admis)
Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$.
On peut donc dire indifféremment u *est équivalente à* v ou v *est équivalente à* u ou u *et* v *sont équivalentes*

2.2 lien avec les petits o

Proposition 7. (Caractérisation de l'équivalence par les petits o)

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(v_n).$$

Exemple 5. $n^2 + \ln n + 1 + \dfrac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} n^2$

Exercice de cours 3. Donner un équivalent de :

1. $u_n = 2^n + n! + n^{10}$.
2. $v_n = \ln n + 2\sqrt{n} + 1$.
3. $\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\ln n}$.

Proposition 8. (Remplacement par une suite équivalente dans un petit o)

1. $$\left\{\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \\ \text{et} \\ v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n \end{array}\right. \implies u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n).$$

2. $$\left\{\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \\ \text{et} \\ u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n \end{array}\right. \implies w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n).$$

2.3 lien avec les signes et les limites

Dans cette partie, on va voir que pour étudier le signe d'une suite "à partir d'un certain rang" ou pour étudier la limite d'une suite, on peut étudier une suite équivalente.

Proposition 9. (Équivalence et signes)

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors (u_n) et (v_n) sont de même signe à partir d'un certain rang.

Exercice de cours 4. Prouver que $u_n = \dfrac{-1}{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - 2\dfrac{2}{n^2}$ est positive à partir d'un certain rang.

Proposition 10. (Équivalence et limites)

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors (u_n) a une limite si seulement si (v_n) en a une et dans ce cas ces limites sont égales.

Autrement dit : Pour étudier la limite d'une suite, on peut étudier la limite d'une suite équivalente.

Proposition 11. (Suite convergeant vers une limite non nulle)
Soit $\ell \in \mathbb{R}^*$.

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \iff u_n \underset{+\infty}{\sim} \ell.$$

Attention !

- On n'a **jamais** $u_n \underset{+\infty}{\sim} 0$.
- $u_n \underset{+\infty}{\sim} +\infty$ n'a aucun sens !

2.4 Équivalents et opérations

Proposition 12. (Équivalences et opérations)

1. **Transitivité :**

$$\begin{cases} u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \\ \text{et} \\ v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n \end{cases} \implies u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n.$$

2. **Produit :**

$$\begin{cases} u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \\ \text{et} \\ w_n \underset{+\infty}{\sim} t_n \end{cases} \implies \begin{cases} u_n w_n \underset{+\infty}{\sim} v_n t_n \\ \text{et} \\ \dfrac{u_n}{w_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{v_n}{t_n} \end{cases}.$$

Autrement dit : Dans un produit ou un quotient, on obtient un équivalent en remplaçant une suite par une suite équivalente.

3. **Passage l'inverse :**

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \frac{1}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}.$$

4. **Élévation à une puissance constante :**

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies u_n^k \underset{+\infty}{\sim} v_n^k.$$

Si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies u_n^\alpha \underset{+\infty}{\sim} v_n^\alpha$.

5. **Passage à la valeur absolue :**

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies |u_n| \underset{+\infty}{\sim} |v_n|.$$

Attention !

- $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \not\Longrightarrow e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n}$.
- $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \not\Longrightarrow \ln u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln v_n$.
- $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \not\Longrightarrow {u_n}^n \underset{+\infty}{\sim} {v_n}^n$.

(voir l'exercice 6 pour des contre-exemple)

Exercice de cours 5. Déterminer dans chaque cas un équivalent simple de la suite proposée. En déduire sa limite.

1. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)(n + \ln n)^2$.
2. $v_n = \dfrac{\ln n + 1}{n + \sqrt{n}}$.
3. $w_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^3+1}}$.

2.5 Equivalents usuels

Ces équivalents doivent tous être connus par cœur et pourront être utilisés sans démonstration.

Proposition 13. (Equivalents usuels)
Soit (u_n) une suite **qui converge vers** 0**.** On a alors :

1. $\sin(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$
2. $\cos u_n \underset{+\infty}{\sim} 1$ et $1 - \cos(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$
3. $\tan(u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$
4. $\ln(1 + u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$
5. $e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} 1$ et $e^{u_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} u_n$
6. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (1 + u_n)^\alpha - 1 \underset{+\infty}{\sim} \alpha u_n$. En particulier $\sqrt{1 + u_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{u_n}{2}$.

Proposition 14. (Équivalents et polynômes)
Soit $P(X) = a_p X^p + \cdots + a_q X^q$ avec $q \leq p,\ a_p \neq 0,\ a_q \neq 0$.

1. Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $P(u_n) \underset{+\infty}{\sim} a_q u_n^q$. En particulier $P\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} a_q \left(\dfrac{1}{n}\right)^q$.
2. Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \pm\infty$, $P(u_n) \underset{+\infty}{\sim} a_p u_n^p$. En particulier $P(n) \underset{+\infty}{\sim} a_p n^p$.

Exemple 6.

1. $\dfrac{2}{n} - \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{1}{n^4} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$
2. $3n^2 + 2n + n^3 \underset{+\infty}{\sim} n^3$
3. $\ln n + (\ln n)^2 \underset{+\infty}{\sim} (\ln n)^2$.

Exercice de cours 6. Déterminer dans chaque cas un équivalent simple de la suite proposée.

1. $u_n = \ln(n+1) - \ln n$.
2. $v_n = (n+1)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$.
3. $w_n = \tan\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n^2}$
4. $t_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)$.
5. $s_n = \left(1 + \ln\left(1 + \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right)^{\frac{2}{3}} - 1$.

Exercice de cours 7.

1. On pose $u_n = n$ et $v_n = n+1$. Vérifier que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ mais que $e^{u_n} \underset{+\infty}{\not\sim} e^{v_n}$.
2. On pose $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{n}$. Vérifier que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ mais que $\ln u_n \underset{+\infty}{\not\sim} \ln v_n$.
3. On pose $u_n = 1$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{n}$. Vérifier que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ mais que ${u_n}^n \underset{+\infty}{\sim} {v_n}^n$.