Colle 18 – Espaces vectoriels.

Exercice 1 .

On considère les deux ensembles suivants : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b),\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$. Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2 .

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, (u_n) \text{ bornée }\}$
2. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, (u_n) \text{ monotone }\}$
3. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, (u_n) \text{ arithmétique }\}$

Exercice 3 .

Montrer que $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 4 .

On considère $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions de E croissantes. On pose

$$\Delta = \{f - g, (f, g) \in \mathcal{C}^2\}.$$

Montrer que Δ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 5 .

Pour tout $m \in \mathbb{R}$ on note $E_m = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = m\}$. Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels E_m est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6 .

Démontrer que l'ensemble G des polynômes à coefficients réels qui sont divisibles par $X^2 + 1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7 .

Dans $\mathbb{R}^2$, on donne les vecteurs $u_1 = (-1, 2)$, $u_2 = (1, -1)$ et $u_3 = (2, -3)$.

1. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une famille liée de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que la décomposition du vecteur $u = (1, 2)$ en combinaison linéaire de (u_1, u_2, u_3) n'est pas unique. Combien admet-il de décompositions ?
4. Montrer que la famille (u_1, u_2) est aussi génératrice de $\mathbb{R}^2$ mais que la décomposition de tout vecteur en combinaison linéaire de (u_1, u_2) est unique.
5. Montrer que la famille (u_1, u_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^2$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 8 .

Déterminer une base pour chacun des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

— $A = \{(x + 2y, -y + 3x, 3y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$,
— $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$,
— $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - z = 0 \text{ et } y + z = 0\}$,

Exercice 9 .

Soit E l'ensemble des matrices de la forme $M = \begin{pmatrix} 2a-b+c & 0 & a-2b \\ a+b & a-b-c & 2a+b \\ a-2b & a+3b & a+b-2c \end{pmatrix}$ où a, b et c sont des réels.

1. Démontrer que E est un espace vectoriel.
2. Déterminer une base de E.
3. Montrer que l'ensemble F des matrices de la forme $M = \begin{pmatrix} 5\alpha & 0 & -4\alpha \\ 5\alpha & -5\alpha & 7\alpha \\ -4\alpha & 11\alpha & -3\alpha \end{pmatrix}$ est un sous-espace vectoriel de E, dont on donnera une base.

Exercice 10 .

1. Démontrer que les polynômes $P_1(X) = 1$, $P_2(X) = 1 + X$, $P_3(X) = 1 + X + X^2$ et $P_4(X) = 1 + X + X^2 + X^3$ forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Démontrer que les polynômes $Q_1(X) = 1 - X$, $Q_2(X) = 1 + X - X^2$, $Q_3(X) = 1 + 2X - X^3$ et $Q_4(X) = 1 + X + X^2 + X^3$ forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 11 .

Démontrer que les suites u, v et w définies par $u_n = 2^n$, $v_n = 3^n$ et $w_n = 4^n$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 12 .

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de vecteurs de F. Montrer que pour tout $a \in F \backslash Vect(e_1, \ldots, e_p)$, la famille $(e_1 + a, \ldots, e_p + a)$ est libre.