Feuille d'exercices n°16 - Comparaison de suites

Exercice 1

Dans chaque cas, déterminer si l'une des suites est négligeable devant l'autre.

1. $u_n = 2n^3$; $v_n = 3n^2$
2. $u_n = (\ln n)^2$; $v_n = \frac{n}{2}$
3. $u_n = n$; $v_n = \frac{1}{n}$
4. $u_n = (\ln n)^2$; $v_n = \ln n$
5. $u_n = n \ln n$; $v_n = n^{\frac{3}{2}}$
6. $u_n = e^{\frac{n}{2}}$; $v_n = n^3$
7. $u_n = e^n$; $v_n = 3^n$
8. $u_n = e^n$; $v_n = \mathrm{e}^{\frac{n}{2}}$
9. $u_n = (\ln 2)^n$; $v_n = n^2$
10. $u_n = \frac{1}{n}$; $v_n = n$
11. $u_n = 4$; $v_n = \sqrt{n}$
12. $u_n = \frac{n}{2}$; $v_n = \frac{n}{3}$

Exercice 2

Donner un équivalent simple à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les exemples suivants et en déduire la limite de la suite.

1. $u_n = (n + 3\ln(n))e^{-(n+1)}$
2. $u_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n+1}$
3. $\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$
4. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$
5. $u_n = \frac{n^2+4}{n^3+8n}$
6. $u_n = \sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)}$
7. $u_n = \frac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{\ln(n) - 2n^2}$
8. $u_n = \frac{2n^3 - \ln(n) + 1}{n^2+1}$
9. $u_n = \frac{n! + e^n}{2^n + 3^n}$
10. $u_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$
11. $u_n = \frac{\ln(n) + (-1)^n}{n^2 + \sqrt{n}}$
12. $u_n = \frac{(2n+1)^2}{3n+4}$
13. $u_n = \ln(n) + 4$
14. $u_n = \frac{1}{4\sqrt{n}} + 3^{-n+2}$
15. $u_n = \frac{4^{n+3} + 2^n}{5^{n+2} + 1}$

Exercice 3

Déterminer un équivalent simple à la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dans les exemples suivants :

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2+n+1}\right), \quad u_n = \sin\left(e^{-n+2} + \frac{2}{n}\right), \quad u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{2n}\right)\right),$$

$$u_n = \exp\left(\sin(2^{-n})\right) - 1, \quad u_n = \sqrt{1 + \frac{1}{3n + 4n^2 - 1}} - 1 .$$

Exercice 4

Montrer que $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Exercice 5

Déterminer les limites des suites de termes généraux suivants :

1. $u_n = n\sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right)}$
2. $u_n = \left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$
3. (***) $u_n = \frac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$
4. $u_n = n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 6 (**)

Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \ln(x) = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.
3. Donner un équivalent simple de la suite (x_n).

Exercice 7 (**)

Pour $n \geq 2$, on considère le polynôme

$$P_n = X^n - nX + 1.$$

1. Montrer que P_n admet exactement une racine réelle entre 0 et 1, notée x_n.
2. Déterminer la limite de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Déterminer un équivalent simple de (x_n).

Exercice 8 (***)

On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Justifier que

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. Déterminer la limite de (S_n).
3. On pose $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Montrer que (u_n) converge.
4. Donner un équivalent simple de (S_n).

Exercice 9 (***)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels telle que

$$u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que (u_n) converge vers 0^+.
2. Donner un équivalent simple de (u_n).