TP Scilab n°14 – Résolution d'équation

Dans ce TP, vous allez construire des programmes donnant la valeur approchée de la solution d'une équation. Vous allez voir deux méthodes :

- La méthode par dichotomie
- La méthode des tangentes.

Vous comparerez ensuite la rapidité de convergence de ces deux méthodes.

Ces deux méthodes permettent de résoudre des équations de la forme :

$$f(x) = 0$$

On remarquera que toute équation peut se ramener à la forme ci-dessus en passant tout le second membre à gauche.

Dans les deux méthodes, on suppose qu'on dispose d'un intervalle $[a, b]$ sur lequel f est défini et dont on sait qu'il contient une et une seule solution de l'équation $f(x) = 0$. On notera cette solution α.

1 Méthode par dichotomie

Comme son nom l'indique (dicho-tomie = couper en deux), la méthode par dichotomie consiste à couper en deux l'intervalle $[a, b]$ puis par chercher dans laquelle des deux parties se trouve α et à recommencer ainsi de suite.

Plus précisément :

1- On nomme c le milieu de $[a, b]$.
2- On calcule $f(c)$.
3- Si $f(c)$ est du même signe que $f(a)$:
    Dans ce cas, f ne change pas de signe entre a et c donc α se situe entre c et b.
    On doit donc maintenant chercher α dans $[c, b]$
    On pose donc $a = c$ et on a notre nouvel intervalle $[a, b]$ dans lequel rechercher α.
   Sinon :
    f change de signe entre a et c, donc α se situe entre a et c.
    On doit donc maintenant chercher α dans $[a, c]$
    On pose donc $b = c$ et on a notre nouvel intervalle $[a, b]$ dans lequel rechercher α.

   On recommence ainsi de suite tant que la largeur de l'intervalle $[a, b]$ est supérieure à une précision p fixée au départ.

Exercice :

1. Créer dans Scilab une fonction : `alpha = dicho(f,a,b,p)`qui exécute la méthode par dichotomie tant que la largeur de l'intervalle $[a, b]$ est supérieure à p puis renvoie le milieu de cet intervalle.
2. Créer dans Scilab la fonction $f: x \mapsto x^2 - 2$.
   a. Quelle et la solution positive de l'équation $f(x) = 0$?
   b. A l'aide de Scilab, écrire ci-dessous la valeur approchée de cette solution avec la précision maximale permise par Scilab (taper `format(25)` dans la console pour afficher les résultats avec le maximum de décimales possibles) :

      $\alpha =$ ____
3. Exécuter votre programme avec la fonction f et l'intervalle $[0,2]$ et la précision 10^{-9} . Ecrire ci-dessous le résultat obtenu :

   $\alpha \approx$ ____
4. Modifier votre fonction pour qu'elle renvoie deux valeurs : la valeur approchée de α et le nombre d'itérations nécessaires. La fonction s'écrira `[alpha,n] = dicho(f,a,b,p)`

2 Méthode des tangentes (ou méthode de Newton) :

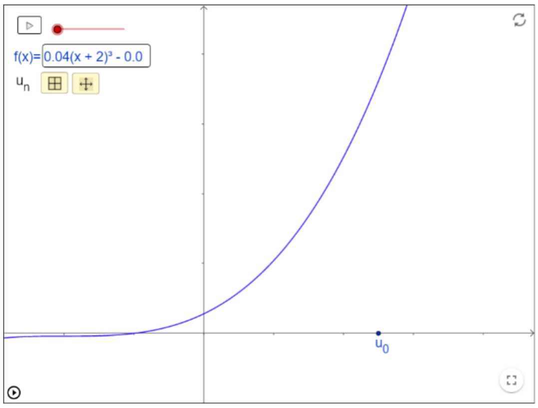
Cette méthode nécessite, pour être sûr d'aboutir, que f soit convexe, ou concave, sur $[a, b]$.

Nous allons l'illustrer avec la fonction $f : x \mapsto 0{,}004(x+2)^3 - 0{,}004$ dont la courbe est donnée ci-dessous et qui permet de bien visualiser la méthode.

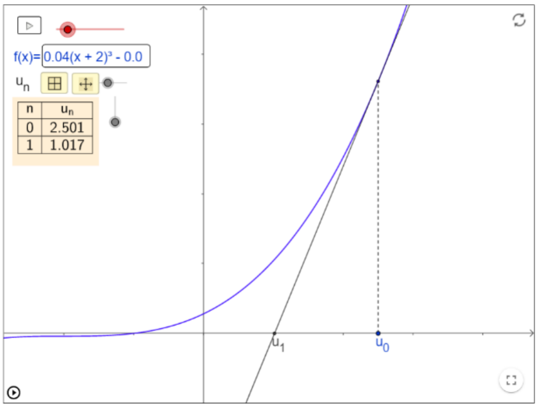
Avec cette fonction, l'équation $f(x) = 0$ admet $\alpha = -1$ comme unique solution sur $\mathbb{R}$. Notre programme doit donc nous donner une solution qui soit proche de -1.

Toutes les images ci-dessous sont issues de l'animation Geogebra disponible ici que je vous conseille de consulter.

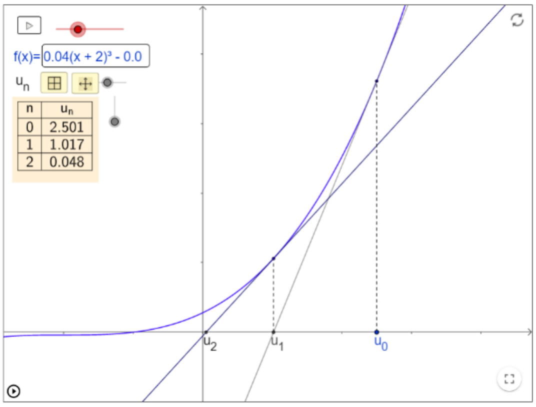
Pour fonctionner la méthode des tangentes a besoin d'avoir une valeur u_0 proche de la solution α recherchée.



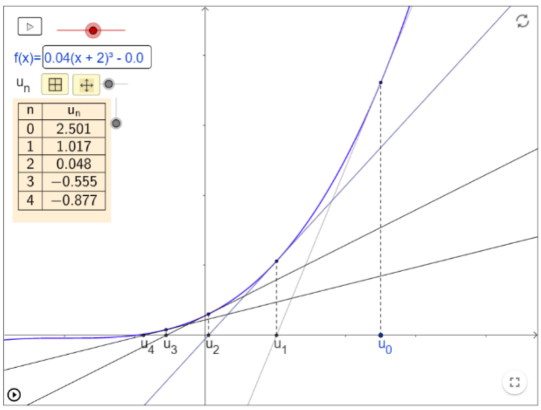
On considère alors la tangente à C_f en u_0 et on cherche son point d'intersection u_1 avec l'axe des abscisses :



Puis on recommence à partir de u_1 :



On crée ainsi une suite de réelle (u_n) dont on peut montrer qu'elle converge vers α :



On conviendra ici d'arrêter de calculer les u_n dès que la distance $|u_{n+1} - u_n|$ est inférieure à la précision souhaitée.

Exercice 2 : un peu de théorie.

On va ici déterminer la relation de récurrence de la suite (u_n) définie ci-dessus.

1. Rappeler l'équation de la tangente à C_f en u_n. E
2. En déduire l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

Exercice 3 :

Vous l'aurez compris, pour fonctionner la méthode des tangentes a besoin d'avoir l'expression de f'. Comme Scilab ne sait pas calculer cette expression, il faudra la passer en paramètre d'entrée de notre fonction.

1. Créer une fonction `[alpha n]=newton(f,df,u0,p)` qui applique la méthode de Newton avec la fonction `f`, de dérivée `df`, comme première valeur `u0` et avec la précision p.

   f et df devront avoir été créées préalablement pour que la fonction newton fonctionne.

2. Exécuter la fonction newton pour retrouver la valeur approchée de la solution positive de l'équation $x^2 - 2 = 0$ avec une précision de 10^{-9}.
3. Comparer le nombre d'itérations nécessaires avec celui de la dichotomie.