Programme de colle n° 19
Semaine du 15/03/2021
Espaces Vectoriels et Comparaison de suites

Le programme de colle de cette semaine porte sur l'ensemble des chapitres 15 et 16.

Questions de cours

Toutes les questions de cours doivent être maîtrisées cette semaine

Espaces vectoriels

1. Qu'appelle-t-on une famille génératrice d'un espace vectoriel E ?
   Réponse attendue :
   C'est une famille de vecteurs de E telle que tout vecteur de E est combinaison linéaire de cette famille.

2. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. Donner la définition d'une combinaison linéaire de $(u_1, \ldots, u_n)$.
   Réponse attendue :
   C'est un vecteur de la forme $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des scalaires.

3. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. Qu'appelle-t-on $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ et que peut-on en dire ?
   Réponse attendue :
   $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ est l'ensemble des combinaisons linéaire de $(u_1, \ldots, u_n)$.
   C'est une sous-espaces vectoriel de E.
   Tout sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ contient $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.
   Autrement dit : si F est un sous-espace vectoriel et $u_1 \in F, \ldots, u_n \in F$, alors $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) \subset F$.

4. Traduire $v \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.
   Réponse attendue :
   $v \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) \iff v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des scalaires.
   Ou, mieux :
   $v \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) \iff \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$.

5. Traduire « $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille génératrice de E » à l'aide de Vect.
   Réponse attendue :
   « $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille génératrice de $E \iff E = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$.

6. (a) Donner la définition d'une famille libre, d'une famille liée.
   (b) Une famille de un vecteur peut-elle être libre ? liée ?
   (c) Comment cela se traduit-il pour une famille de deux vecteurs ?

   Réponse attendue : Une famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre si la seule combinaison linéaire de cette famille qui est nulle est la combinaison linéaire dont tous les coefficients sont nuls. Autrement dit si :

   $$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u = 0 \text{ implique } \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

   Une famille liée est une famille non libre.
   Une famille comportant un seul vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.
   Une famille de deux vecteurs est libre si et seulement si ces deux vecteurs sont non colinéaires.

7. Donner la caractérisation d'une famille liée.
   Réponse attendue :
   Une famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs est une combinaison linéaire des autres.

8. Que peut-on dire d'une sur-famille d'une famille génératrice et d'une sous-famille d'une famille libre ?
Réponse attendue :
Une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice
Une sous-famille d'une famille libre est libre.

9. A quelle condition peut-on enlever un vecteur d'une famille génératrice de sorte que la famille obtenue soit encore génératrice (*proposition 6 - réduction d'une famille génératrice*) ?
Réponse attendue :
Si dans une famille génératrice, un vecteur est combinaison linéaire des autres, alors la famille obtenue en enlevant ce vecteur reste génératrice.

10. Donner la liste des opérations que l'on peut faire sur les vecteurs d'un Vect sans le modifier (proposition 7 du cours).
Réponse attendue :
On ne change pas $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ si on :
    (a) enlève le vecteur nul (si la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ en contient un !), ou un vecteur redondant, ou un vecteur qui s'écrit comme une combinaison linéaire des autres vecteurs,
    (b) permute des vecteurs,
    (c) multiplie un vecteur par un scalaire non nul,
    (d) remplace un vecteur par une combinaison linéaire de ce vecteur (avec un coefficient non nul pour ce vecteur) et d'autres vecteurs de la famille.

11. Donner la définition d'une base d'un espace vectoriel.
Réponse attendue :
C'est une famille libre et génératrice.

12. Donner la caractérisation d'une base par l'existence et l'unicité de la décompostion.
Réponse attendue :
Une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E si tout vecteur de E s'écrit **de façon unique** comme combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$.

13. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une base d'un espace vectoriel E. Qu'appelle-t-on coordonnées d'un vecteur $x \in E$ dans la base $(u_1, \ldots, u_n)$?
Réponse attendue :
$(u_1, \ldots, u_n)$ étant une base de E, x s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$.
Il existe donc un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de scalaires tel que $x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$.
Ce n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est appelé « coordonnées de x dans la base $(u_1, \ldots, u_n)$ ».

14. Donner la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$, de $\mathbb{R}_n[X]$ et de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Comparaison entre suites

15. Donner la définition et la notation du fait :
    (a) qu'une suite (u_n) est négligeable devant une suite (v_n),
    (b) qu'une suite (u_n) est équivalente devant une suite (v_n).

Réponse attendue :
    (a) "une suite (u_n) est négligeable devant une suite v_n" se note $u_n = o(v_n)$ et signifie $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$,
    (b) "une suite (u_n) est équivalente devant une suite v_n" se note $u_n \sim v_n$ et signifie $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

16. Donner la caractérisation de l'équivalence avec les "petit o". **Réponse attendue :**
$$u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n).$$

17. Donner les équivalents usuels.
Réponse attendue :
Soit (u_n) une suite **qui converge vers** 0. On a alors :
(a) $\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
(b) $1-\cos(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$
(c) $\tan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
(d) $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
(e) $e^{u_n}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$
(f) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$. En particulier $\sqrt{1+u_n}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n}{2}$.

Démonstrations (pour le groupe A')

Membres du groupe A' :

- Yusef
- Hafsa
- Ismail
- Dan
- Lina
- Cédric
- Mylanh
- Maxime
- Yacine
- Anis

Après la question de cours vous devrez faire l'une des démonstrations suivantes :

1. Soit $(u_1,\dots,u_n)$ une famille de vecteurs de E. Prouver que $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E (*voir démonstration à la fin de ce programme de colle*).
2. Démontrer la proposition 6 (*réduction d'une famille génératrice - démonstration faite en classe*).
3. Démontrer la proposition 8 (*voir démonstration à la fin de ce programme de colle*) *Voir la démonstration*

Méthodes à connaître pour les exercices

- Connaître toutes les méthodes du chapitre 15 et savoir refaire tous les exercices faits en classe.
- Savoir refaire les exercices faits en classe su chapitre 16, notamment les exercices 1 et 2.

Démonstrations

1. $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.
On va procéder comme d'habitude, en appliquant la méthode 1 : pour cela, on pose $F=\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$. F est donc l'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1,\dots,u_n$.
   - $u_1,\dots,u_n$ étant dans E, toute combinaison linéaire de ces vecteurs et dans E donc $F\subset E$.
   - $\sum\limits_{i=1}^n 0u_i = 0_E$ donc $0_E\in F$ donc $F\neq\emptyset$.
   - Soient $(u,v)\in F^2$ et $(a,b)\in\mathbb{K}^2$. Montrons que $au+bv\in E$.
   $u\in F$ donc $\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ u=\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i u_i$.

$v \in F$ donc $\exists(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n) \in \mathbb{K}^n,\ v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda'_i u_i$. Alors :

$$\begin{aligned} au + bv &= a\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i + b\sum_{i=1}^{n} \lambda'_i u_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} a\lambda_i u_i + b\lambda'_i u_i \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a\lambda_i + b\lambda'_i) u_i \end{aligned}$$

Donc $au + bv$ et une combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_n$: on a bien $au + bv \in F$.
Donc F est s.e.v. de E.

2. On doit montrer qu'une famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

   - **Sens direct :**
   Montrons que si la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée alors l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.
   Si $(u_1, \dots, u_n)$ et liée, il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls.
   Il existe donc n scalaires non tous nuls $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$.

     Quitte à renuméroter les u_i, on peut supposer que $\lambda_n \neq 0$.
   On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0 &\iff \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i u_i + \lambda_n u_n = 0 \\ &\iff \lambda_n u_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i u_i \qquad \iff u_n = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=1}^{n-1} -\lambda_i u_i \quad \text{car } \lambda_n \neq 0. \\ &\iff u_n = \sum_{i=1}^{n-1} -\frac{\lambda_i}{\lambda_n} u_i. \end{aligned}$$

   - **Réciproque :**
   Montrons que si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres alors la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée .
   Quitte à renuméroter les u_i, on peut supposer que c'est u_n qui est combinaison linéaire des autres.
   On a alors $u_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i u_i$ où $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$.
   Ce qui équivaut à $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i u_i - u_n = 0$.
   $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i u_i - u_n$ est donc une combinaison linéaire nulle des u_i à coefficients non tous nuls. Donc la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée.