Chapitre 17

Dérivées successives - Formules de Taylor

Table des matières

1 Dérivées successives

1.1 Définitions

Définition 1. (Dérivée n-ième d'une fonction)
Soit f une fonction définie sur I. Pour $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est n fois dérivable sur I si :

- f est dérivable sur I
- f' est dérivable sur I
- ...
- $f^{\overbrace{''\cdots'}^{n-1 \text{ fois}}}$ est dérivable sur I.

On note alors :

$$f^{(n)} = f^{\overbrace{''\cdots'}^{n \text{ fois}}}.$$

Remarque. On a en particulier $f^{(0)} = f$ et $f^{(1)} = f'$

Exemple 1.
Si on pose $f = \exp$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)} = f$.

Définition 2. (Fonction de classe $\mathscr{C}^n$)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si elle est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I. On note $\mathscr{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.
- On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si elle est indéfiniment dérivable sur I.

Remarque.

- f est de classe $\mathscr{C}^0$ sur I ssi f est continue sur I.
- f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ssi f est dérivable sur I et f' est continue sur I.
- f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I ssi f est deux fois dérivable sur I et f'' est continue sur I.
- etc.

Remarque.

1. $\mathscr{C}^0(I)$ est donc l'ensemble des fonctions continues sur I.
   Et plutôt que d'écrire « f est continue sur I, on peut écrire $f \in \mathscr{C}^0(I)$ »
2. $\mathscr{C}^1(I)$ est donc l'ensemble des fonctions dérivables sur I dont la dérivée est continue sur I.
   Attention : Écrire « $f \in \mathscr{C}^0(I)$ » ne signifie pas exactement « f est dérivable sur I » !

Remarque.

- Si $p \leq n$, $\mathscr{C}^\infty(I) \subset \mathscr{C}^n(I) \subset \mathscr{C}^p(I)$.
- Une fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ elle est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. Autrement dit :
$$\mathscr{C}^\infty(I) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{C}^n(I).$$

Proposition 1. (Fonctions usuelles) (admis)

1. $\exp \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x \mapsto x^n \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.
3. $\forall n \in \mathbb{Z}_-^*,\ x \mapsto x^n \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$. En particulier : $x \mapsto \dfrac{1}{x} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$.
4. $\ln \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$.
5. $\cos \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\sin \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.
6. $\tan \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$ et $\mathrm{Arctan} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice de cours 1. Calclus de dérivées n-ième.
Pour chaque fonction usuelle ci-dessous, exprimer sa dérivée n-ième pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque :

1. $f = \exp$.
2. $g : x \mapsto x^r$ avec $r \in \mathbb{N}^*$
3. $h : x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.
4. $i : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Remarque. Retour sur le changement de variable dans une intégrale et sur les IPP
Pour être licite, un changement de variable doit être de classe $\mathscr{C}^1$. Autrement dit, lorsqu'on pose $u = \varphi(t)$, il faut bien préciser et justifier que φ est de classe $\mathscr{C}^1$.
De même dans une IPP, les fonctions u et v doivent être de classe $\mathscr{C}^1$.

Proposition 2. (Dérivée $n+1$-ième d'un polynôme de degré n)
Soit f une fonction polynômiale de degré n, alors $f^{(n+1)} = 0$.
Et plus généralement, $\forall k \geq n+1, f^{(k)} = 0$.

1.2 Opérations et formules de Leibniz

Proposition 3. (Dérivées successives et opérations)
Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors : On a alors :

1. λf et $f+g$ sont n-fois dérivables sur I et on a :
$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)} \qquad \text{et} \qquad (f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$
2. fg est n-fois dérivable sur I et on a :
$$\textbf{Formule de Leibniz : } (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$
3. si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont n fois dérivable sur I.

Proposition 4. (Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$) (admis)
Si f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) sur un intervalle I, alors λf, $f+g$ et fg sont de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) sur I.
Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) sur I.

Proposition 5. ($\mathscr{C}^n(I)$ et $\mathscr{C}^\infty(I)$ sont de sev) (admis)

$$\mathscr{C}^n(I) \text{ et } \mathscr{C}^\infty(I) \text{ sont des sous-espaces vectoriels de } \mathbb{R}^I.$$

Proposition 6. (Composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^n$) (admis)
Soient f de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) sur I et g de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) sur J tel que $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) sur I.

Remarque. Il n'y a pas de formule pour calculer la dérivée n-ième d'un quotient ou d'une composée. Dans ce cas, la seule méthode à votre disposition est le raisonnement par récurrence. Mais pour celà, il vous faut la forme générale de la dérivée n-ième. Si on ne vous la donne pas, c'est soit qu'il y a un "truc" (comme dans l'exercice 3 de la FE17), soit qu'on peut la deviner facilement en calculant f', f'', etc..

Exercice de cours 2. Application de la formule de Leibniz
Montrer que la fonction $f : x \mapsto (1+x+x^2)e^{-x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f^{(n)}$.

2 Formules de Taylor

2.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 7. (Formule de Taylor avec reste intégral)
Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I. Alors pour tout $a, x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Cas particulier à connaître : formule avec reste intégrale en 0. Si $0 \in I$:

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Exercice de cours 3.

1. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral en 0 à l'ordre 3 puis 4 pour la fonction $\sin$.
2. En déduire que :
$$\forall x \in [0]\, \frac{\pi}{2}, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

2.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 8. (Inégalité de Taylor-Lagrange)
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I, $a, b \in I$ et M un majorant de $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur $[a, b]$ (ou $[b, a]$). On a :

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leq \frac{M|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Cas particulier à connaître, si $0 \in I$, si $x \in I$ et que M un majorant de $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur $[0, x]$ (ou $[x, 0]$ On a : :

$$\forall x \in I, \quad \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leq \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exercice de cours 4. On pose $f = \exp$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer, si $x > 0$ un majorant de $\left|f^{(n+1)}(t)\right|$ sur $[0, x]$ et, si $x < 0$ un majorant de $\left|f^{(n+1)}(t)\right|$ sur $[x, 0]$
2. En déduire que, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$

2.3 Formule de Taylor pour les polynômes

Théorème 9. (Formule de Taylor pour les polynômes)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de degré au plus n. Alors pour tout $a, x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \forall a, x \in \mathbb{R}, \quad P(x) &= P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{aligned}$$

Autrement dit :
$\left(1, (X-a), (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle les coordonnées d'un polynôme P sont : $\left(P(a), P'(a), \frac{P^{(2)}(a)}{2}, \ldots, \frac{P^{(n)}(a)}{n!}\right)$.
Cette base est appelée "**base de Taylor en** a **de** $\mathbb{R}_n[X]$".

Exercice de cours 5.
Exprimer le polynôme $X^4 + 5X^3 + 2X^2 - 1$ en fonction de $(X+2)^k$ pour $0 \leq k \leq 4$.