FE17 – Dérivées successives – formules de Taylor

Exercice 1 (**)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto e^{-x}, \qquad g : x \mapsto \frac{1}{1+x}, \qquad h : x \mapsto \frac{1}{1-x}, \qquad i : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$$

Exercice 2 (**)
r désigne un entier naturel.
Déterminer pour tout entier naturel k la dérivée k-ième de la fonction définie sur $]0,1[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

Exercice 3 (*)
Déterminer, en utilisant les résultats de l'exercice 1 la dérivée $n-ième$ de

$$f : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$$

Indication : *il n'y a presque aucun calcul à faire. Il faut se rappeler que* $\frac{1}{1-x^2}$ *peut s'écrire en fonction de* $\frac{1}{1+x}$ *et* $\frac{1}{1-x}$.

Exercice 4 (**)
On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Démontrer que la dérivée n-ième de f s'écrit sous la forme :

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2+1)^{n+1}}$$

Où P_n est un polynôme de degré n. On explicitera la relation de récurrence définissant les polynômes P_n.

Exercice 5(**)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :

$$f(x) = (x^2+1)\,e^x \quad ; \quad g(x) = x^2(1+x)^n$$

Exercice 6 (***)

1. Donner une formule pour la dérivée k-ième de $x \mapsto (x^n)$ pour $k \leq n$.
2. En calculant de deux manières différentes la dérivée n-ième de $x \mapsto x^{2n}$, calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 7
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. On pose $f : x \mapsto x^n \ln(x)$. Montrer que
$$f^{(n)}(x) = n! \left(\ln(x) + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right).$$
2. Donner une formule pour $(\ln)^{(k)}$, pour tout $k \geq 1$.
3. En déduire que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Exercice 8
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$.
2. Etudier l'existence de $f''(0)$.
3. Soit $t < 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que :
$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$$
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9

Écrire les développements de Taylor avec reste intégral des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \cos(x)$ à l'ordre 4 entre 0 et x.
2. $f(x) = \sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 entre 0 et x.
3. $f(x) = \frac{1}{x}$ à l'ordre 3 entre 2 et x.
4. $f(x) = \exp(2x)$ à l'ordre 3 entre 0 et x.
5. $f(x) = \ln(1+3x)$ à l'ordre 3 entre 0 et x.

Exercice 10

Soit P une fonction polynômiale de degré $n \geq 2$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(a), P'(a), ..., P^{(n)}(a)$ soient tous strictement positifs. Montrer que P n'a pas de racine dans $[a, +\infty[$.

Exercice 11

En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ entre 0 et 1, montrer que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2).$$

Exercice 12

Le but de cet exercice est de déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de : $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}} - n$.

1. Montrer que la suite $(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2)$.
2. A l'aide d'une formule de Taylor, montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $|e^x - 1 - x| \leq \frac{ex^2}{2}$.
3. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{k+n}} - n - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}| \leq \frac{e}{2n}$. Conclure.

Exercice 13

Pour tout $x > 0$, on considère la série de terme général $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$, avec $n \geq 0$.

1. Montrer que la série converge. On note $g(x)$ la somme de la série. Que vaut $g(1)$?
2. A l'aide d'une formule de Taylor, montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u \geq 0$: $|e^{-u} - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k u^k}{k!}| \leq \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}$.
3. a) Montrer alors que pour tout $x \geq 1$, $|\int_0^1 u^{x-1}e^{-u}du - \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!(k+x)}| \leq \frac{1}{(n+1)!} \times \frac{1}{x+n+1}$.

   b) En déduire que pour tout $x \geq 1$, $\int_0^1 u^{x-1}e^{-u}du = g(x)$.
   bonus : montrer que le résultat précédent reste vrai si $0 < x < 1$.

Exercice 14

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$.

1. a) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer la monotonie de f.
   c) Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis $-\infty$, et dresser le TV de f en précisant $f(0)$.
2. (a) Montrer que pour tout $u \in [-1,1]$, $|e^{-u} - 1 + u| \leq \frac{3u^2}{2}$ à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange.
   (b) En déduire que :$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall h \in [-1,1]$, $\forall t \in [0,1]$, $|e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt}| \leq h^2 \frac{3t^2}{2}e^{-xt}$
   Montrer alors : $|f(x+h) - f(x) + h\int_0^1 \frac{te^{-xt}}{1+t^2}dt| \leq \frac{3h^2}{2}\int_0^1 \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}dt$.
   (c) En déduire que f est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\int_0^1 \frac{te^{-xt}}{1+t^2}dt$.

Exercice 15

1. Montrer que pour tout réel x, les intégrales $S(x) = \int_0^1 \sin(xt)e^{-t^2}dt$ et $C(x) = \int_0^1 t\cos(xt)e^{-t^2}dt$ existent.
2. A l'aide de l'inégalité de T-L, montrer : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$: $|\sin(a+y) - \sin a - y\cos a| \leq \frac{y^2}{2}$.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall h \in \mathbb{R}^*$, $\forall t \in [0,1]$: $\left|\frac{\sin((x+h)t)e^{-t^2} - \sin(xt)e^{-t^2}}{h} - t\cos(xt)e^{-t^2}\right| \leq \frac{|h|}{2}t^2e^{-t^2}$
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$: $\left|\frac{S(x+h)-S(x)}{h} - C(x)\right| \leq \frac{|h|}{2}\int_0^1 t^2e^{-t^2}dt$.
5. Montrer alors que S est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa dérivée S'.