Exercice 5

1. $\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right) \sim \frac{1}{n^2+1}$ $\left(\text{car si } v_n \to 0,\ \ln(1+v_n) \sim v_n\right)$

$\sim \frac{1}{n^2}$

Donc $\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)} \sim \frac{1}{n^2}$

Donc $u_n \sim n \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

Donc $\boxed{u_n \longrightarrow 0}$

2. $u_n = e^{n \ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)}$

On $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ donc $\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$.

d'où $n \ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim n \times \frac{1}{n} = 1$.

donc $n \ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \longrightarrow 1$.

donc $e^{n \ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \longrightarrow e$

$\boxed{u_n \longrightarrow e}$

3. $u_n = \dfrac{e^{\sqrt{n+1}\ln n}}{e^{\sqrt{n}\ln(n+1)}}$

$= e^{\sqrt{n+1}\ln n - \sqrt{n}\ln(n+1)}$

Or $\sqrt{n+1}\ln n - \sqrt{n}\ln(n+1) = \sqrt{n+1}\ln n - \sqrt{n}\left(\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$

$= \ln n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) - \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

On a vu (exercice 4) que $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

donc $\ln n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \sim \dfrac{\ln n}{2\sqrt{n}}$

Or $\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \sqrt{n} \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Et, de plus $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = o\left(\dfrac{\ln n}{2\sqrt{n}}\right)$ (considérer le quotient)

Donc $\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est négligeable devant $\ln n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

D'où $\ln n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) - \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \ln n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

$\sim \dfrac{\ln n}{2\sqrt{n}}$

D'où $\sqrt{n+1}\ln n - \sqrt{n}\ln(n+1) \sim \dfrac{\ln n}{2\sqrt{n}} \longrightarrow 0$ par crois. comp.

Donc $\boxed{u_n \longrightarrow 1}$

$\overline{m}$