TP Scilab n°15 – calcul approché d'intégrale

1 Méthode des rectangles

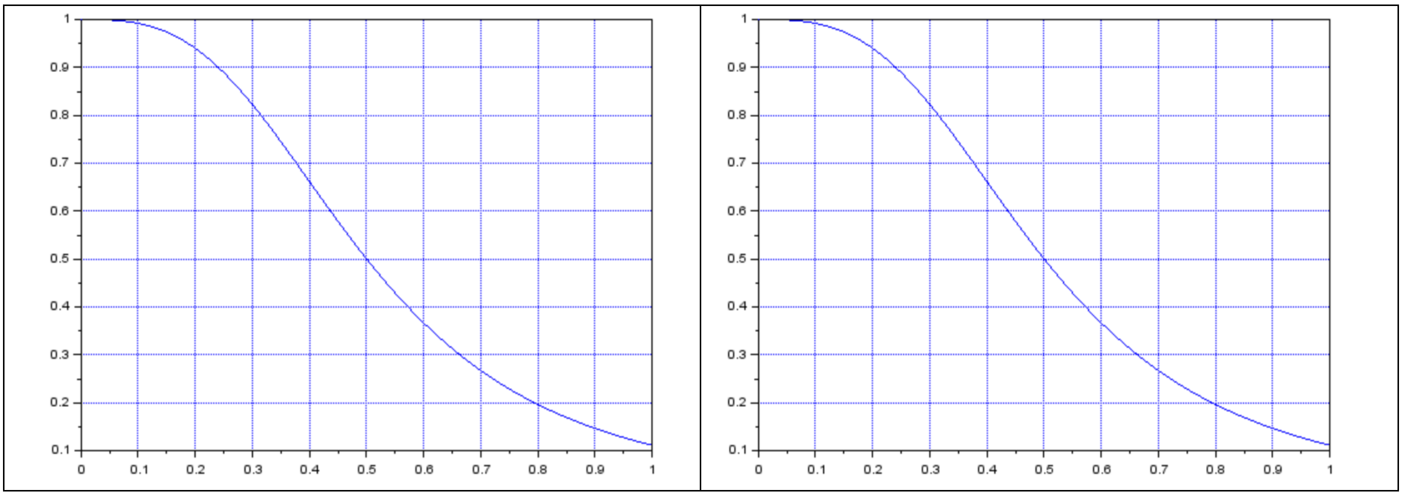
1.1 Rappels sur les intégrales de Riemann

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{et} \quad T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Question 1 :

On a tracé ci-dessous la courbe d'une fonction f définie sur $[0,1]$. Représenter sur le graphique de gauche les rectangles donc la somme des aires est égale S_5 et sur celui de droite les rectangles dont la somme des aires vaut T_5.



Question 2 :

Rappeler quelle est la limite de (S_n) et de (T_n) :

1.2 Approximation de $\int_0^1 f(t)\,dt$ pour une fonction f particulière.

Dans cette partie, on considère que f est la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1+8x^3}.$$

Question 3.a :

Réécrivez les définitions de S_n et de T_n en remplaçant $f\left(\frac{k}{n}\right)$ par son expression et en simplifiant au maximum. Indiquez ci-dessous l'expression obtenue.

Question 3.b :

Ecrire un programme qui demande à l'utilisateur la valeur de n et affiche ensuite la valeur de S_n et de T_n. Vous devez trouver :

$$S_{100} \approx 0.549442839808 \quad \text{et} \quad T_{100} \approx 0.540553950919$$

Recopiez votre programme ci-dessous :

Question 3.c :

Mettre votre programme ci-dessus en commentaire et en faire deux fonctions : Sn(n) et Tn(n), qui renvoient respectivement la valeur de S_n et de T_n.

Ecrire ci-dessous le script de ces deux fonctions :

Question 3.d :

Ecrire un programme qui utilise les fonctions ci-dessous pour calculer S_n et T_n pour toutes les valeurs de n allant de 1 à 100 et qui stocke ces valeurs dans deux variables S et T puis qui affiche un graphique représentant ces deux suites.

Ecrire votre programme ci-dessous :

1.3 Approximation de $\int_0^1 f(t)\,dt$ pour une fonction f quelconque.

Passer tous les scripts des parties précédentes en commentaire.

Plutôt que d'avoir une fonction qui calcule la valeur de $\int_0^1 f(t)\,dt$ pour une fonction f particulière, on aimerait pouvoir calculer $\int_0^1 f(t)\,dt$ pour une fonction f quelconque que l'on définira par ailleurs.

Question 4.a

Compléter le script ci-dessous pour définir une fonction `f1` correspondant la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+8x^3}$ de la partie précédente.

```
function y=f1(x)



endfunction
```

Question 4.b

Modifier les fonctions `Sn(n)` et `Tn(n)` créées à la question 3.c en des fonctions `Sn(f,n)` et `Tn(f,n)` pour que ces fonctions calculent les valeurs des deux suites S_n et T_n pour la valeur de n et la fonction `f` entrées en paramètre.
Ecrire ci-dessous le script de ces deux fonctions :

Question 4.c

4.c.i Calculer « à la main » l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$$

4.c.ii Définir dans Scilab la fonction $g : x \mapsto \frac{4}{1+x^2}$ puis calculer une valeur approchée de $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$ à l'aide des fonctions Sn et Tn définies à la question 4.b. On prendra pour cela $n = 100\,000$.
Ecrire ci-dessous les valeurs obtenues et compter combien de décimales de π correctes on obtient avec cette méthode.

$S_{100000} \approx$ ________________ $T_{100000} \approx$ ________________

On rappelle que les 30 premières décimales de π sont : $\pi \approx 3.141592653589793238462643383279$
(voir ici pour les 120 000 premières décimales de π)

1.4 Approximation de $\int_a^b f(t)\,dt$ pour une fonction f quelconque et un intervalle $[a,b]$ quelconque.

Question 5

Modifier les fonctions `Sn(f,n)` et `Tn(f,n)` créées à la question 4.b en des fonctions `Sn(f,a,b,n)` et `Tn(f,a,b,n)` pour que ces fonctions calculent les valeurs des deux suites de Riemann S_n et T_n pour la valeur de n et la fonction `f` entrées en paramètre telles qu'elles ont été définies dans le cours.
Ecrire ci-dessous le script de ces deux fonctions :

2 Méthode des trapèzes.

Plutôt que d'utiliser la méthode des rectangles, on peut utiliser la méthode des trapèzes qui est illustrée par l'animation Geogebra disponible ici.

Question 6 : Créer une fonction `trap(f,a,b,n)` qui calcule l'aire des n trapèzes. Ecrire ci-dessous le script de cette fonction.
Calculer alors la valeur approchée de $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$ à l'aide de la méthode des trapèzes avec $n = 100\,000$ et comparer la précision obtenue par rapport à la méthode des rectangles.
