Feuille d'exercices n°18
Sommes de sous-espaces vectoriels
Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1 . (ADC)

On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 0\} \text{ et } G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3z = 0\}.$$

1. Déterminer une base de F et une base de G.
2. Donner une famille génératrice de $F+G$ puis une base de $F+G$.

Exercice 2 . (ADC)

Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3z = 0\}$ (comme à l'ADC 1).

1. Déterminer $F \cap G$.
2. La somme $F+G$ est-elle directe ?

Exercice 3 . (ADC)

Dans $\mathbb{R}^3$, soient $F = \text{Vect}((1,1,1))$ et $H = \text{Vect}((2,1,-1))$.

Montrer que H et F sont en somme directe.

Exercice 4 . (ADC)

Dans chaque cas, montrer que F est un espace vectoriel de dimension finie et déterminer sa dimension.

1. $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 5y + 4z = 0\right\}$;
2. $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = y + z = z + t = 0\right\}$;
3. $F = \left\{(3x - 5y, 2x, x + y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$
4. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$;
5. $F = \left\{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid {}^tA = -A\right\}$;
6. $F = \left\{\begin{pmatrix} a+b+c & a-b \\ c+b & a+b+c \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$;
7. l'ensemble F des suites réelles arithmétiques.

Exercice 5 . (ADC)

1. Montrer que la famille $((1,0,1),(0,1,0),(1,2,3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que la famille $(X^2 + X + 1, 2X^2 + 3X + 4, -X^2 + X + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 6 . (ADC)

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs $e_1 = (0,-1,2)$, $e_2 = (1,-2,3)$ et $e_3 = (1,-1,1)$ et on note

$$F = \text{Vect}\{e_1, e_2, e_3\}.$$

1. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de F. Quelle est la dimension de F?
2. Compléter la famille libre $\mathcal{B}$ pour former une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 . (ADC)

Dans $\mathbb{R}^4$, on pose $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = x - 4t + 2z = 0\}$.

1. Déterminer la dimension de E
2. Montrer que $E = \text{Vect}\big((2, 1, -3, -1), (2, -5, 3, 2)\big)$.

Exercice 8 .

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n. Montrer que $(P, P', P'', \ldots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 9 .

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((0, 1, 1), (-1, 1, -1))$.

1. Déterminer la dimension de F et de G.
2. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?
3. Déterminer une base de $F \cap G$.
4. Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$.

Exercice 10 .

On appelle « hyperplan » d'un espace vectoriel E de dimension n tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

1. Soit E un espace vectoriel de dimension n et H et H_2 deux hyperplans **distincts** de E. Démontrer que :

$$\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$$

2. En déduire que l'intersection de deux plans vectoriels *distincts* de $\mathbb{R}^3$ est une droite vectorielle.

Exercice 11 .

On a vu que les espaces F et H de l'exercice 3 sont en somme directe. Sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 12 .

Posons $E = Vect(X - 1, X + 2)$ et $F = Vect(X, X^2)$.
Montrer que $E + F = \mathbb{R}_2[X]$. La somme est-elle directe ?

Exercice 13 .

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose $F = Vect((1, 0, 0), (1, 2, 3))$. Déterminer un supplémentaire G de F dans E.

Exercice 14 .

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants : $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (1,1,0,0)$, $u_3 = (1,1,1,0)$ et $u_4 = (1,1,1,1)$. Soient

$$F = \text{Vect}(u_1, u_2) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(u_3, u_4)$$

Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 15 .

On considère les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 3y + 4z = 0\}$ et $F = Vect((1, 0, 0))$.

1. Déterminer une base de E et de F.

2. Montrer que E et F sont supplémentaires.

Exercice 16 . (***)

Soient $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = P'(1) = 0\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}[X]$ (par analyse-synthèse).

Exercice 17 . Polynômes de Lagrange.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ des réels deux à deux distincts. On pose, pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$:

$$L_i(X) = \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} (X - \alpha_k)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n+1} (\alpha_i - \alpha_k)}$$

1. Pour cette question, et cette question seulement, on prend $n = 2$ et $\alpha_1 = 2$ $\alpha_2 = 5$ et $\alpha_3 = 7$.

   a. Donner l'expression de L_1, L_2 et L_3.

   b. Donner pour tout $i \in [\![1,3]\!]$ et tout $j \in [\![1,3]\!]$ la valeur de $L_i(\alpha_j)$

   c. En déduire que la famille (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

   d. Déterminer les cordonnées d'un polynôme P dans cette base.

   e. Soit f un polynôme de degré 2 tel que $f(2) = 4$; $f(5) = -3$ et $f(7) = 0$. Déterminer f.

2. Reprendre les questions 1.b, 1.c et 1.d dans le cas général.

Exercice 18 . Espaces vectoriels de Polynômes :

Dans toute la suite du problème on note $E = \mathbb{R}_6[\mathbf{X}]$ et on s'intéresse aux ensembles suivants

$$F = \left\{\delta\mathbf{X}^6 + \alpha\mathbf{X}^5 + \beta\mathbf{X}^4 + \gamma\mathbf{X}^3 + \beta\mathbf{X}^2 + \alpha\mathbf{X} + \delta,\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4\right\}$$
$$G = \left\{\lambda\mathbf{X}^3 + \mu\mathbf{X}^2 + \mu\mathbf{X} + \lambda,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
$$H = \{P \in E,\ P'(-1) = 0\}$$

1. Rappeler la base canonique de E ainsi que sa dimension.

2. Jusitifer que tous les éléments de G soient divisible par le polynôme $\mathbf{X} + 1$.

3. Etude de F et de G

   (a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

   (b) Donner une base de F et une de base de G. En déduire $\dim(F)$ et $\dim(G)$.

   (c) A-t-on $F \oplus G$? $E = F \oplus G$?

4. Etude de H

   (a) Sans en chercher une famille génératrice, montrer que H est un sous-espace vectoriel de E. **pts**]

   (b) Sans en chercher une famille génératrice, montrer que $\dim(H) \leq 6$.

   (c) Montrer que $\mathcal{F} = (1, (\mathbf{X}+1)^2, (\mathbf{X}+1)^3, (\mathbf{X}+1)^4, (\mathbf{X}+1)^5, (\mathbf{X}+1)^6)$ est une famille libre d'éléments de H.

   (d) Justifier soigneusement que $\dim(H) = 6$.

5. Etude de $G \cap H$

   (a) Justifier que $1 \leq \dim(G \cap H) \leq 2$.

   (b) Expliquer pourquoi un des deux choix est absurde.

   (c) Montrer que tout polynôme de $G \cap H$ admet -1 comme racine multiplie.

   (d) En déduire une base de $\dim(G \cap H)$.